TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Soluzione del Problema 3 del compito d'esame del 23-01-2013

Problema 3. Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = e^{-2t}\cos(t),$$

si calcolino la funzione di trasferimento e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(3t)$.

Soluzione. Per definizione la funzione di trasferimento $W(s)$ è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva $w(t)$. Tenendo conto che

$$\mathcal{L}\big(cos(\omega\, t)\big) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{e che} \quad F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\big(e^{a\,t} f(t)\big) = F(s-a)$$

(l'ultima proprietà è il teorema della *traslazione in frequenza*), si ha

$$W(s) = \mathcal{L}\big(e^{-2t}\cos(t)\big) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}.$$

La risposta armonica esiste perché il sistema in esame è asintoticamente stabile, almeno per la parte raggiungibile e osservabile (lo si deduce dalla risposta impulsiva che tende esponenzialmente a zero). Gli autovalori sono i poli della $W(s)$, e quindi $\lambda_{1,2} = -2 \pm j$, ed hanno parte reale strettamente minore di zero.

Per il calcolo della risposta armonica $y_a(t)$ ad un ingresso $u(t) = M\cos(\omega\, t + \varphi)$ si utilizza la formula:

$$y_a(t) = |W(j\omega)|\, M \cos(\omega\, t + \varphi + \langle W(j\omega)\rangle)$$

(si ricorda che la dimostrazione di questa formula è parte del programma del corso), dove $|W(j\omega)|$ è il modulo del numero complesso $W(j\omega)$, e $\langle W(j\omega)\rangle$ ne è la fase.

Nel nostro problema $M = 1$, $\varphi = 0$ e $\omega = 3$ rad/s. Pertanto

$$y_a(t) = |W(j\,3)| \cos(3\,t + \langle W(j\,3)\rangle).$$

Si ha quindi

$$W(j\,3) = \frac{j\,3+2}{(j\,3+2)^2+1} = \frac{j\,3+2}{(-9+4+j12)+1} = \frac{j\,3+2}{-4+j\,12} = -\frac{2+j\,3}{4(1-j3)}.$$

Si ricordi che, dato un numero complesso $z = a + j\,b$, il modulo $|z|$ è pari a $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, e la fase $\langle z\rangle$ è pari a $\langle z\rangle = \arctan(b/a)$ se $a > 0$ (ma, attenzione, se $a < 0$ la fase è $\langle z\rangle = \arctan(b/a) + \pi$, e se $a = 0$ è $\langle z\rangle = \mathrm{sign}(b)\pi/2$).

Se z_1 e z_2 sono due numeri complessi, si ha $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ e $\langle z_1/z_2\rangle = \langle z_1\rangle - \langle z_2\rangle$. Inoltre, $\langle -z\rangle = \pi + \langle z\rangle$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
|W(j\,3)| &= \frac{|2+j\,3|}{4|1-j3|} = \frac{\sqrt{4+9}}{4\sqrt{1+9}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{13}{10}} \approx 0.285 \\
\langle W(j\,3)\rangle &= \pi + \langle 2+j\,3\rangle - \langle 1-j3\rangle = \pi + \arctan(3/2) - \arctan(-3) \\
&= \pi + \arctan(3/2) + \arctan(3) \approx 5.373 \text{ rad}
\end{aligned}$$

Pertanto, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(3\,t)$ sarà

$$y_a(t) = 0.285\, \cos(3\,t + 5.373).$$