TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 18-11-2013

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{s-1}{s(s^2+64)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato $e^{A\,t}$;
3. Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Si consideri un sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta all'impulso unitario nell'origine:

$$w(t) = (0.8)^{t-1}, \quad w(0) = 0.$$

Utilizzando la trasformata Z si calcoli la risposta al gradino unitario, e alla seguente sequenza di ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \text{ pari} \\ -1 & \text{per } t \text{ dispari}, \end{cases} \qquad t \geq 0, \qquad u(t) = 0 \text{ per } t < 0.$$

(Suggerimento: si scriva la sequenza di ingresso come una funzione sinusoidale).

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo rappresentato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1, \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili. Inoltre, si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -k\left(1 + x_2^2(t)\right)x_1(t) + x_2(t) + 1 \\ \dot{x}_2(t) = -\left(1 + x_2^2(t)\right)\left(1 + x_2(t)\right) - x_1^3 \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, -1)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov (*Suggerimento per la funzione di Lyapunov:* $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^4 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
