TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 13-01-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{10-s}{(s-1)^2(s+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato A^t;
3. Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Si consideri un sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta all'impulso unitario nell'origine:

$$w(t) = 5\,e^{-4t} - 2\,e^{-t}.$$

Si calcoli la risposta a regime all'ingresso $u(t) = 2\,\cos(3\,t)$.

Problema 4. Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si trovi una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0\ 0\ 0]^T$ a $\bar{x} = [2\ 0\ 2]^T$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \big(x_1(t) - 1\big)\big(-\alpha^2 + 2\big(x_2(t) - 1\big)\big) \\ \dot{x}_2(t) = (\alpha - 1)\big(x_2(t) - 1\big) - \big(x_1(t) - 1\big)^2 \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (1, 1)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica del tipo*: $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^2 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
