TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 27-01-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{-2}{(s+1)^2(s^2+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato A^t;
3. Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. Si consideri un sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta all'impulso unitario nell'origine:

$$w(t) = 3\,e^{-2t}.$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 5\,\sin(2\,t)$.

Problema 4. Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si trovi una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0\ 0\ 0]^T$ a $x_a = [2\ \ -2\ \ 0]^T$.
4. Si trovi una sequenza di ingresso che porti lo stato da $x(0) = [0\ 0\ 0]^T$ a $x_b = [2\ \ \ 0\ \ 2]^T$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1-\alpha)x_1(t) + \alpha\, x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha^2 x_2(t) - x_1^2(t) \end{cases}$$

1. Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, ove necessario, il metodo di Lyapunov;
2. Si studi per quali valori di α il sistema ammette altri punti di equilibrio, e se ne studi la stabilità.

(*Come funzione di Lyapunov si utilizzi una funzione quadratica del tipo*:
$V(x) = (x_1 - x_{e,1})^2 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
