TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 10-02-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\frac{18}{s(s-1)(s-9)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Siano dati due sistemi lineari autonomi (con ingresso nullo), uno a tempo continuo, $\dot{x}_c(t) = Ax_c(t)$, ed uno a tempo-discreto, $x_d(t+1) = Ax_d(t)$, caratterizzati dalla stessa matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Gli autovalori λ_k e gli autovettori destri r_k e sinistri ℓ_k della matrice A sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.5 + j\,0.5 \\ \lambda_2 &= 0.5 - j\,0.5 \\ \lambda_3 &= -2 \end{aligned} \qquad r_1 = \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \; r_2 = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \; r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \ell_1 &= \tfrac{1}{2}[-j \quad 1 \quad -1\,] \\ \ell_2 &= \tfrac{1}{2}[\;\, j \quad 1 \quad -1\,] \\ \ell_3 &= \;\;\,[\;\,0 \quad 1 \quad\;\; 0\,] \end{aligned}$$

Si calcolino le evoluzioni libere dello stato di entrambi i sistemi ($x_c(t)$ e $x_d(t)$) a partire dallo stesso stato iniziale $x_c(0) = x_d(0) = [\,1\ 0\ 0]^T$.
(Suggerimento: per limitare la quantità di calcoli occorre sfruttare la decomposizione spettrale delle matrici di transizione evitandone il calcolo esplicito.)

Problema 3. Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $x(t)$ e $u(t)$ sono scalari:

$$x(t+1) = 0.8\,x(t) + u(t)$$

- Si calcoli la risposta dello stato al gradino unitario ($u(t) = 1$ per $t \geq 0$).
- Si calcoli la risposta armonica dello stato all'ingresso $u(t) = \cos\big((\pi/2)t\big)$.

Problema 4. Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C \;= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^3$ tale che la sequenza di uscita in evoluzione libera sia costante e pari a $y(t) = 5$, $\forall t \geq 0$. .

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t)\big(x_2(t)+1\big)^2 + \alpha\,x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \big(x_2(t)+1\big)\big(\alpha - 1 - x_1^2(t)\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, -1)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, ove necessario, il metodo di Lyapunov (*Come funzione di Lyapunov si utilizzi una funzione quadratica del tipo*:
$V(x) = (x_1 - x_{e,1})^2 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
