**TEORIA DEI SISTEMI**

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 23-09-2014

**Problema 1.** Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\,\frac{(s-2)}{s^2+10\,s+100}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli per quali valori della pulsazione $\omega$ la fase di $W(j\omega)$ è esattamente pari a 0;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

**Problema 2.** Sia dato un sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si calcoli la matrice di transizione dello stato $A^t$.

**Problema 3.** Sia dato il seguente sistema a tempo continuo, dove $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3\,x(t) + 2\,u(t), \\ y(t) &= x(t), \end{aligned}$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos\big(2\,t\big)$.

**Problema 4.** Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 0$, $y(1) = 3$, $y(2) = -3$; $y(3) = 3$.

**Problema 5.** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \alpha\,x_2(t) + \alpha^2\,x_1^3(t) \end{cases}$$

Si trovino tutti i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito.*)

---

**Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.**

---