TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 17-11-2014

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\,10\frac{(s-40)}{(s+4)(s^2+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato un sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ed un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ aventi la stessa matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, caratterizzata da una coppia di autovalori complessi coniugati: $\lambda_1 = 1/4 + j/4$, $\lambda_2 = 1/4 - j/4$. La matrice di autovettori destri sia la seguente

$$R = \begin{bmatrix} 2j & -2j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino la matrice A, e le matrici di transizione A^t e e^{At} dei due sistemi;
2. Si discuta la stabilità dei modi naturali dei due sistemi.

Problema 3. Sia dato il seguente sistema a tempo continuo, dove $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= -3\,x(t) + 2\,u(t), \\ y(t) &= x(t), \end{aligned}$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos\big(3\,t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 0$ y(1)=1,y(2)=-1$y(3) = 3$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \beta\left(2x_2(t) + 3\,x_1^2(t)\,x_2^2(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) = (\beta - 1)\,x_2(t) + x_1(t) + \beta\,x_1^2(t)x_2^2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $\beta \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov.
(*Si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.