TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 07-01-2015

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K\,10\frac{(s-10)}{s(s+2)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato un sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ed un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ aventi la stessa matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, i cui autovalori λ_i e le coppie di autovettori destri e sinistri associati (r_i, ℓ_i) sono

$$\lambda_1 = -1, \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = j, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ j \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = -j, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -j \end{bmatrix}$$

$$\ell_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ell_2 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -j \end{bmatrix} \qquad \ell_3 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & j \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino la matrice A, e le matrici di transizione A^t e e^{At} dei due sistemi;
2. Si discuta la stabilità dei modi naturali dei due sistemi.

Problema 3. Sia dato un sistema a tempo continuo ad un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-2t} - e^{-3t}.$$

Si calcolino la risposta forzata al gradino e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin\big(6\,t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia identicamente pari a 10 $(y(0) = y(1) = y(2) = y(3) = 10)$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \big(\alpha + x_2(t)\big)\,\sin x_1(t) + 3\,\alpha\,x_1(t)\,\big(x_2(t) - 1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha^2\big(x_2(t) - 1\big) - 3\,x_1(t)\sin x_1(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 1)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione del tipo $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^2 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
