TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 22-01-2015

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{5}{(s-1)(s^2+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato un sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\,u(t)$, $y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$, la cui matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{A\,t}$ è

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2\,t) & -e^{-t}\sin(2\,t) \\ e^{-t}\sin(2\,t) & e^{-t}\cos(2\,t) \end{bmatrix}.$$

Si verifichi la proprietà di semigruppo della $\Phi(t)$, si calcoli la matrice A del sistema e se ne calcoli la decomposizione spettrale.

Problema 3. Sia dato un sistema a tempo discreto ad un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \frac{1}{2^t} - \frac{1}{3^t}.$$

Si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos\big((\pi/2)\,t\big)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si trovi una sequenza di ingresso $u(t)$ tale da portare lo stato $x(0) = 0$ nello stato finale $\bar{x} = [1\;0\;0\;1]^T$.

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha^2 x_1(t) + 2\,x_2(t)\,\sin x_1(t) - \alpha\,x_1(t)\,x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \big(\alpha - 1\big)\,x_2(t) - x_1(t)\,\sin x_1(t). \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione del tipo $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^2 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, con β opportuno.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
