TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Alcune soluzioni del compito d'esame del 19-02-2015

Problema 4. Svolgere nell'ordine i seguenti due problemi:
4.1 Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{2}x_1(t) - \dfrac{3}{2}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \dfrac{1}{2}x_2(t). \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_1\,x_2$.

4.2 Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + (\alpha-1)x_2(t) + (2\alpha+1)x_1(t)\sin x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + (\alpha+1)x_2(t) + (2\alpha+1)x_2^2(t). \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov.,

4.1. Svolgimento.

Per prima cosa è necessario verificare che la candidata funzione di Lyapunov suggerita sia effettivamente una forma quadratica definita positiva. A tale scopo è bene scriverla nella forma standard $V(x) = x^T Q x$:

$$V(x) = 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_1\,x_2 = x^T Q x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando il criterio di Sylvester si verifica facilmente che la matrice simmetrica Q è definita positiva, in quanto i determinanti dei due minori principali ($Q_{1,1}$ e Q) sono entrambi positivi.

A questo punto per studiare la stabilità dell'origine occorre studiare il segno della derivata della funzione di Lyapunov lungo le traiettorie del sistema. A tale scopo è utile scrivere il sistema nella forma $\dot{x}(t) = Ax(t)$, dove la matrice A è data da:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Per il calcolo della derivata di $V\big(x(t)\big)$ si potrebbe utilizzare direttamente l'espressione suggerita di $V(x)$, svolgendo per esteso il calcolo di $\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2(t)$.

Risulta però conveniente utilizzare la forma standard $V(x) = x^T Q x$, tenendo conto che

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{d\big(x^T(t)Qx(t)\big)}{dt} = \dot{x}^T(t)Qx(t) + x^T(t)Q\dot{x}(t). \tag{1}$$

Ricordando che $\dot{x}(t) = Ax(t)$, e che $\dot{x}^T(t) = x^T(t)A^T$, si ha

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)A^TQx(t) + x^T(t)QAx(t) = x^T(t)\left(A^TQ + QA\right)x(t). \tag{2}$$

Pertanto lo studio del segno di $\dot{V}(x(t))$ si fa studiando il segno della forma quadratica

$$\dot{V}(x) = x^T\left(A^TQ + QA\right)x.$$

Per assicurare la stabilità asintotica dell'origine questa forma quadratica dovrebbe essere definita negativa (semidefinita negativa per la stabilità semplice). Definendo la matrice $P = -\left(A^TQ + QA\right)$ si ha

$$\dot{V}(x) = -x^TPx, \quad \text{con} \quad A^TQ + QA = -P \quad \text{(equazione di Lyapunov)}$$

è possibile applicare il criterio di Sylvester per capire se P sia o meno definita o semidefinita positiva (e quindi $-P$ definita o semidefinita negativa). Per calcolare la matrice P si osservi che è necessario calcolare il solo prodotto matriciale QA e poi sommare il trasposto, $(QA)^T$, per ottenere $-P$. Infatti, ricordando che $(QA)^T = A^T Q^T$, ma anche che $Q = Q^T$ (Q simmetrica), si ha $(QA)^T = A^T Q$, e quindi

$$-P = QA + (QA)^T.$$

Il calcolo di QA fornisce

$$QA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

matrice antisimmetrica, da cui $-P = QA + (QA)^T = 0_{2\times 2}$, e quindi $\dot{V}(x(t)) = 0 \ \forall t \geq 0$.

Pertanto, senza a dover ricorrere al criterio di Sylvester, si ha che $-P$ è banalmente semidefinita negativa (essendo $-P$ una matrice tutta nulla si ha che $x^T P x = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, e quindi $-P$ verifica la definizione di semidefinita negatività: $x^T P x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$) e questo dimostra che l'origine è un punto di equilibrio semplicemente stabile.

PS: anche se non è richiesto dal testo del compito, lo studente smaliziato può verificare il risultato andando a calcolare gli autovalori della matrice A, scoprendo che sono una coppia di autovalori immaginari puri (parte reale nulla):

$$\lambda_{1,2} = \pm j \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Pertanto resta confermata la stabilità semplice.