TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 08-06-2015

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{s}{s^2 + s + 25}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

(Nel tracciare la fase del termine trinomio si utilizzi la formula che fornisce il coefficiente α che lega la pulsazione naturale con i punti di rottura del diagramma asintotico: $\alpha = 5\zeta + \sqrt{25\zeta^2 + 1}$.)

Problema 2. *Sia dato il seguente sistema a tempo discreto*

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si calcolino:

1. *le proprietà dei modi naturali;*
2. *la matrice di transizione dello stato;*
3. *la funzione di trasferimento ingresso-uscita;*
4. *la risposta forzata dell'uscita al gradino unitario;*

Problema 3. *Sia dato un sistema a tempo continuo ad un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:*

$$w(t) = 3\,e^{-2t} + 2\,e^{t}.$$

Si calcolino la risposta forzata al gradino e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin\big(2\,t\big)$.

Problema 4. *Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto*

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. *Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;*
2. *Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;*
3. *Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 10$, $y(1) = y(2) = y(3) = 1$.*

Problema 5. *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha - 1)\,x_1(t) + x_2(t) - \alpha\,x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\alpha\,x_1(t) - 3\alpha\,x_2(t)\,x_1^2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito.)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
