

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Soluzioni del compito d'esame del 24-06-2015

A cura di V. De Iuliis¹

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{s+3}{s(s^2+1)}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Svolgimento.

Per $K = 1$ la funzione di trasferimento da graficare è $\tilde{W}(s) = \frac{s+3}{s(s^2+1)}$.

È facile riconoscere i seguenti termini:

- $(s+3) = 3(1 + \frac{s}{3}) \implies \omega_\tau = 3 \text{ rad/s}$ termine binomio al numeratore; esso contribuisce al diagramma dei moduli mediante una pendenza di $+20 \text{ dB/dec}$ a partire da ω_τ , mentre nel diagramma delle fasi genera una pendenza di $+\pi/4 \text{ rad/s}$ nell'intervallo $[0.1 \omega_\tau, 10 \omega_\tau]$.
- s , termine monomio al denominatore; contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di -20 dB/dec da 0 rad/s in poi, mentre contribuisce al diagramma delle fasi mediante uno sfasamento globale del diagramma di $-\pi/2 \text{ rad}$.
- $s^2+1 = (1 + \frac{s^2}{1}) \implies \omega_n = 1 \text{ rad/s}, \zeta = 0$, termine trinomio non smorzato al denominatore, la cui azione si traduce in una pendenza di -40 dB/dec da ω_n in poi sul diagramma dei moduli, e in uno sfasamento istantaneo di $-\pi \text{ rad}$ in corrispondenza di ω_n nel diagramma delle fasi.

Possiamo allora riscrivere la funzione di trasferimento $\tilde{W}(s)$ come

$$\tilde{W}(s) = 3 \frac{1 + \frac{s}{3}}{s(1 + s^2)}.$$

che mette in evidenza il guadagno di $\tilde{W}(s)$, pari a $K_W = 3$, che nel diagramma dei moduli si traduce in una traslazione globale di $20 \log_{10}(3) \cong 9.54 \text{ dB}$. Chiaramente, un guadagno positivo non causa sfasamenti nel diagramma delle fasi. Prima di procedere al tracciamento dei diagrammi, occorre fare altre due osservazioni importanti: innanzitutto, il termine trinomio non smorzato al denominatore genera un picco di amplificazione infinita in ω_n ; inoltre, la traslazione di $+9.54 \text{ dB}$ introdotta dal guadagno K_W e la presenza del termine monomio al denominatore implicano il passaggio del diagramma dei moduli nel punto $(\omega, |W(j\omega)|_{dB}) = (1 \text{ rad/s}, 9.54 \text{ dB})$.

Quanto ottenuto è riepilogato dalle seguenti tabelle:

¹Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica – vittorio.deiuliis@graduate.univaq.it

Intervallo	Pendenza
$\omega < 1 \text{ rad/s}$	-20 dB/dec
$1 \text{ rad/s} < \omega < 3 \text{ rad/s}$	-60 dB/dec
$3 \text{ rad/s} < \omega$	-40 dB/dec

Intervallo	Pendenza
$\omega < 0.3 \text{ rad/s}$	0 rad/dec
$0.3 \text{ rad/s} < \omega < 30 \text{ rad/s}$	$+\pi/4 \text{ rad/dec}$
$30 \text{ rad/s} < \omega$	0 rad/dec

Tabella 1: Descrizione dei diagrammi di Bode asintotici del modulo (a sinistra) e della fase (a destra) di $\tilde{W}(s)$.

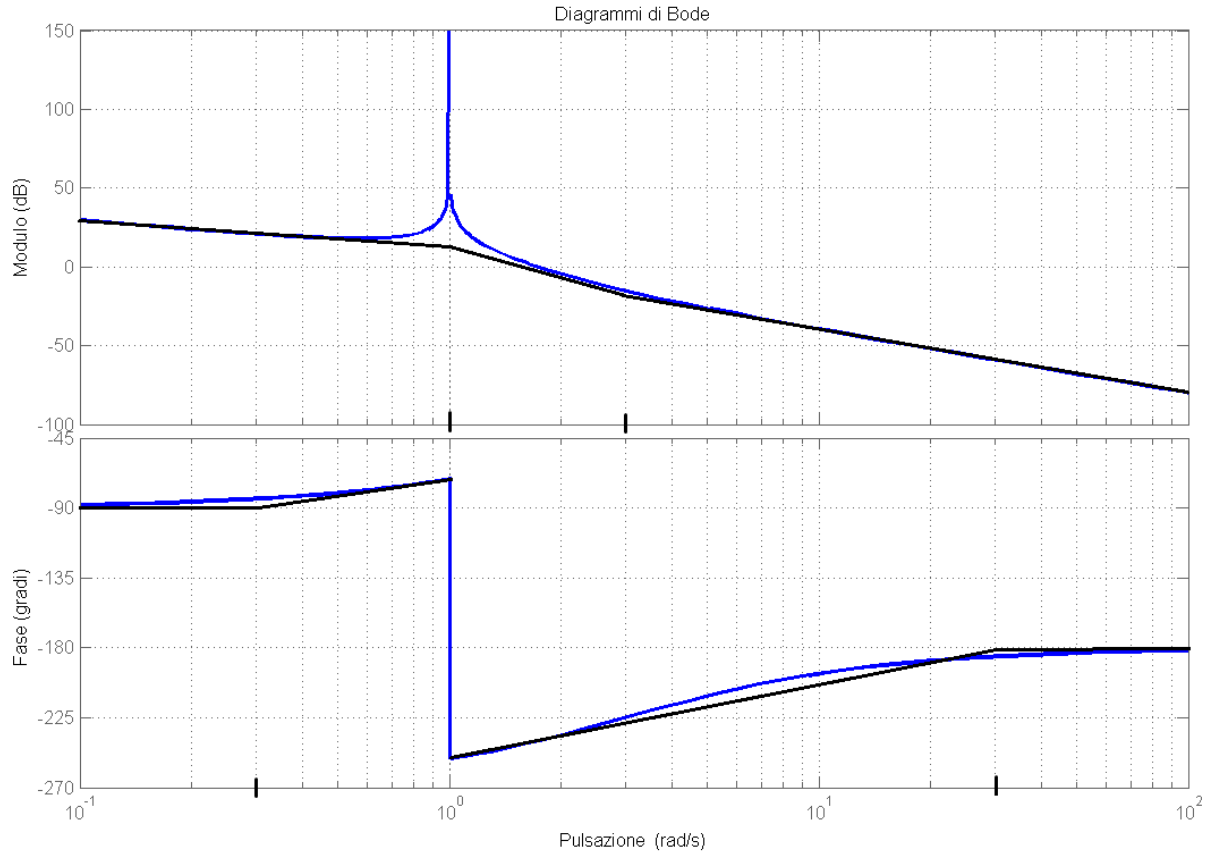


Figura 1: Diagrammi di Bode di $\tilde{W}(s)$: in nero l'andamento asintotico descritto dalla Tabella 1, in blu l'andamento reale.

Osservando con attenzione gli andamenti combinati dei diagrammi di Bode (Figura 1) è possibile tracciare il diagramma polare di $\tilde{W}(s)$. Occorre prestare particolare attenzione alle chiusure all'infinito, che vanno sempre tracciate in modo da essere percorse in senso orario, e devono inoltre rispettare la seguente regola: una chiusura corrispondente a un polo di molteplicità ν compie una rotazione di $\nu \cdot 180^\circ$. Il diagramma polare è riportato in Figura 2.

I punti 2 e 3 del problema riguardano lo studio della stabilità del sistema controreazionato, al variare di K . La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è data da:

$$W_{CH}(s) = \frac{W_{AP}(s)}{1 + W_{AP}(s)} = \frac{K\tilde{W}(s)}{1 + K\tilde{W}(s)} = \frac{K \frac{(s+3)}{s(s^2+1)}}{\frac{s(s^2+1)+K(s+3)}{s(s^2+1)}} = \frac{K(s+3)}{s(s^2+1) + K(s+3)}$$

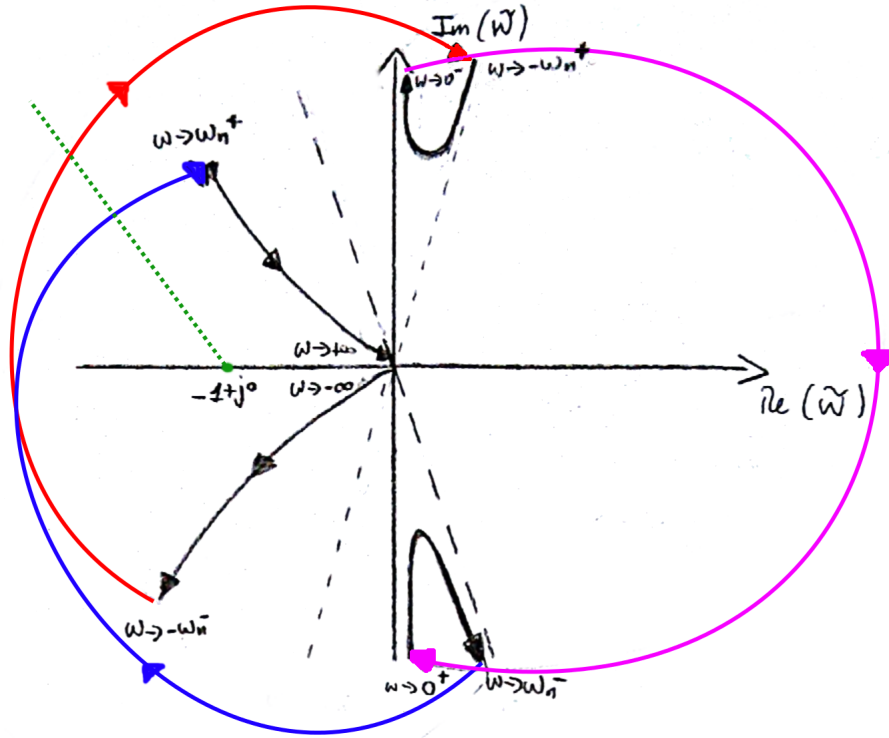


Figura 2: Diagramma polare di $\tilde{W}(s)$.

Indicato allora con $d_{CH}(s)$ il denominatore di $W_{CH}(s)$, si ha

$$d_{CH}(s) = s^3 + (K + 1)s + 3K.$$

La stabilità del sistema controreazionato dipende, al variare di K , dalla posizione dei poli di $d_{CH}(s)$: per avere stabilità asintotica essi devono trovarsi tutti nel semipiano complesso negativo (\mathbb{C}^-). Il criterio di Nyquist lega la stabilità del sistema controreazionato allo studio del diagramma del sistema a catena aperta (o diretta) al variare di K . Al contrario, il criterio di Routh permette di studiare il segno delle radici di un polinomio senza calcolarle direttamente, e può dunque essere applicato a $d_{CH}(s)$ per sancire la stabilità del sistema controreazionato.

La particolare forma del diagramma polare rende piuttosto agevole l'applicazione del criterio di Nyquist: qualunque sia K (escluso il caso nullo, che annullerebbe $W_{AP}(s)$), il diagramma non ha intersezioni con l'asse reale diverse dall'origine, dunque il punto "critico" $-1 + j0$ è sempre esterno al grafico (ma interno alle chiusure all'infinito). In particolare, per $K > 0$ il diagramma ha l'andamento qualitativo visibile in Figura 2 (l'unico effetto di K è di accrescere o diminuire le proporzioni del tracciato): è facile osservare che il diagramma compie due giri in senso orario attorno al punto "critico" (sono due le intersezioni del diagramma con la semiretta con origine in $-1 + j0$). Al contrario, per $K < 0$ il diagramma polare, per effetto del guadagno negativo, ruota di π attorno all'origine, e diviene quello rappresentato in Figura 3: è facile osservare che in questo caso il numero di giri compiuti dal diagramma, in senso orario, attorno a $-1 + j0$ si riduce a 1.

La formula del criterio di Nyquist è la seguente:

$$P_{CH} = P_{AP} - N \quad (1)$$

dove P_{CH} e P_{AP} sono, rispettivamente, il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso e aperto, e N è il numero di giri compiuti dal diagramma attorno al punto “critico” contati positivi in senso *antiorario* (dunque i giri orari vanno considerati negativi).

Poiché $W_{AP}(s) = K \frac{s+3}{s(s^2+1)}$ non ha alcun polo a parte reale positiva (ha tre poli a parte reale nulla, $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm j$), segue subito che $P_{AP} = 0$, da cui, applicando la formula (1), si ha:

- per $K > 0$: $P_{CH} = P_{AP} - N = 0 - (-2) = 2$;
- per $K < 0$: $P_{CH} = P_{AP} - N = 0 - (-1) = 1$.

Indipendentemente dal valore di K , dunque, la funzione di trasferimento a ciclo chiuso ha poli a parte reale positiva (2 se $K > 0$, 1 se $K < 0$). Ciò è sufficiente per concludere che il sistema controreazionato è instabile qualunque sia la scelta di K .

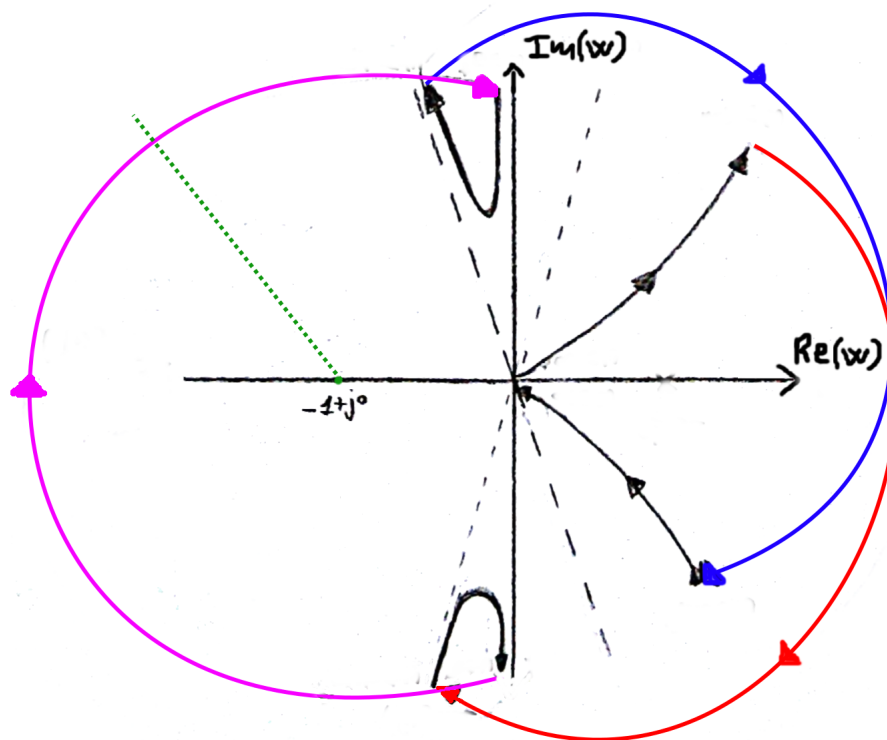


Figura 3: Diagramma polare di $\tilde{W}(s)$.

Il criterio di Routh applicato al polinomio $d_{CH}(s) = s^3 + (K+1)s + 3K$ permette di costruire la seguente tabella:

3	1	$K+1$
2	0	$3K$

e non è possibile calcolare il primo termine della terza riga (riga 1) a causa dell'elemento nullo nella seconda riga. Per proseguire, si rimpiazza tale elemento nullo con $\varepsilon > 0$, e si ottiene:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & K+1 \\
2 & \varepsilon & 3K \\
1 & \frac{3K-\varepsilon(K+1)}{-\varepsilon} & \\
0 & 3K &
\end{array}$$

Moltiplicando ora la terza riga (riga 1) per $\varepsilon > 0$ si ha il termine $-3K + \varepsilon(K + 1)$ e dunque secondo quanto prescritto dal criterio di Routh possiamo passare a studiare i segni della prima colonna della tabella, costituita dai seguenti valori:

$$1 \quad \varepsilon \quad -3K + \varepsilon(K + 1) \quad 3K$$

Una utile semplificazione si ottiene considerando il fatto che ε è un coefficiente positivo molto piccolo, e dunque il termine $-3K + \varepsilon(K + 1)$ ha lo stesso segno di $-3K$. La prima colonna può allora risciversi come:

$$1 \quad \varepsilon \quad -3K \quad 3K$$

dalla quale si ottiene una sola variazione di segno (tra $-3K$ e $3K$), se $K < 0$, e due variazioni di segno (tra ε e $-3K$ e tra $3K$ e $-3K$) se $K > 0$. Poiché ogni variazione di segno corrisponde a una radice a parte reale positiva in $d_{CH}(s)$, ciò conferma esattamente quanto trovato in precedenza con il criterio di Nyquist: il sistema controreazionato è instabile comunque si scelga K .

Problema 2. Sia dato il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Si calcolino:

1. le proprietà dei modi naturali;
2. la matrice di transizione dello stato;
3. la risposta impulsiva;
4. la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Svolgimento.

L'esercizio si può risolvere in due modi: nel dominio del tempo, utilizzando la decomposizione spettrale di A per calcolare la matrice di transizione ($\Phi(t) = e^{At}$) e la risposta impulsiva ($w(t) = Ce^{At}B$), da trasformare per ottenere infine la funzione di trasferimento $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$; oppure si può risolvere nel dominio di Laplace, calcolando $(sI - A)^{-1}$, la cui antitrasformata è e^{At} , e in seguito $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, la cui antitrasformata è $w(t)$. Seguiamo il primo approccio, procedendo nel dominio del tempo.

Il primo passo da affrontare è la decomposizione spettrale di A , che inizia dal calcolo degli autovalori, mediante la risoluzione dell'equazione caratteristica:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Abbiamo ottenuto almeno tre informazioni: gli autovalori di A sono distinti (e dunque è senz'altro possibile completare la decomposizione spettrale diagonalizzando A), complessi coniugati, e inoltre hanno parte reale positiva: possiamo subito affermare che i modi naturali ad essi associati sono *instabili*.

Calcoliamo ora gli autovettori di A . Procediamo con gli autovettori destri, ricordando che anch'essi sono complessi coniugati: basterà trovarne uno, ad esempio u_1 , associato a $\lambda_1 = 1/2 + j\sqrt{3}/2$:

$$\begin{aligned} u_1 \quad \text{risolve} \quad (\lambda_1 I - A)u_1 = 0 &\iff \begin{bmatrix} \lambda_1 & -1 \\ 1 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 u_{1x} - u_{1y} = 0 \\ u_{1x} + (\lambda_1 - 1)u_{1y} = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} u_{1y} = \lambda_1 u_{1x} \\ u_{1x} + (\lambda_1 - 1)\lambda_1 u_{1x} = 0 \implies u_{1x}(\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e si noti che la seconda equazione fornisce l'identità $0 = 0$ in quanto $\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1$ è il polinomio caratteristico di A calcolato in λ_1 (vale dunque zero). Abbiamo scoperto che l'autovettore destro u_1 è un qualsiasi vettore del tipo:

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ \lambda_1 u_{1x} \end{bmatrix} \quad \text{che ad esempio scegliendo} \quad u_{1x} = 1 \quad \text{diventa} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Per quanto detto in precedenza:

$$u_2 = u_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

La matrice degli autovettori destri è dunque

$$U = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

La matrice degli autovettori sinistri si ottiene facilmente invertendo U (così facendo gli autovettori sono già normalizzati):

$$V = U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{j}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}$$

La decomposizione spettrale di A è così completata e si può facilmente verificare che, detta Λ la matrice diagonale degli autovalori di A , si ha $A = U\Lambda V$. Avendo calcolato gli autovettori destri e sinistri, è inoltre possibile studiare altre due importanti proprietà dei modi naturali: l'osservabilità in uscita e l'eccitabilità per impulsi in ingresso.

È molto semplice verificare che

$$C \cdot u_i \neq 0, \quad v_i^T \cdot B \neq 0 \quad \text{per } i = 1, 2$$

e concludere che entrambi i modi sono sia osservabili in uscita che eccitabili per impulsi in ingresso.

Aver diagonalizzato A , è noto dalla teoria, agevola notevolmente il calcolo dell'esponenziale di matrice. Si ha:

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + j\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{j}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} - j\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{j}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Svolgendo i calcoli² e operando alcune semplici manipolazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2\sqrt{3}}\right) e^{(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2})t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2\sqrt{3}}\right) e^{(\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2})t} & \frac{j}{\sqrt{3}} \left(e^{(\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2})t} - e^{(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2})t} \right) \\ -\frac{j}{\sqrt{3}} \left(e^{(\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2})t} - e^{(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2})t} \right) & \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2\sqrt{3}}\right) e^{(\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2})t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2\sqrt{3}}\right) e^{(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2})t} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] & \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & e^{\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} *_{11} & *_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A questo punto la risposta impulsiva $w(t)$ si ottiene calcolando $w(t) = C e^{At} B$, un calcolo piuttosto agevole data la presenza di zeri in C e B :

$$w(t) = C e^{At} B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} *_{11} & *_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [*_{11} \ *_{12}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = *_{12} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

²È a questo punto che ci si pente di non aver risolto l'esercizio nel dominio della frequenza.

Non resta che calcolare la trasformata di Laplace di $w(t)$ per ottenere la risposta all'ultimo punto, ovvero la funzione di trasferimento del sistema in esame. È sufficiente ricordare una delle trasformate notevoli, la trasformata di una senoide modulata da un'esponenziale:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

Da cui:

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{s^2 - s + 1}.$$

Problema 3. Sia dato un sistema a tempo discreto ad un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 0.7^t - 0.3^t.$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
2. si calcoli, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos((\pi/2)t)$.

Svolgimento.

L'esercizio non riserva particolari difficoltà. Per rispondere al primo punto è sufficiente calcolare la trasformata \mathcal{Z} di $w(t)$, vale infatti $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\}$, e la risposta impulsiva proposta è trasformabile semplicemente ricordando la trasformata notevole:

$$\mathcal{Z}\{a^t\} = \frac{z}{z - a}.$$

Si ottiene:

$$\mathcal{Z}\{w(t)\} = \frac{z}{z - 0.7} - \frac{z}{z - 0.3} = \frac{0.4z}{(z - 0.7)(z - 0.3)}.$$

Passiamo al secondo punto. La risposta armonica è la risposta a regime permanente per ingressi sinusoidali: essa esiste se il sistema in esame è asintoticamente stabile, ovvero se ha autovalori il cui modulo è minore di 1, condizione soddisfatta³ dal sistema in esame, che ha autovalori $\lambda_1 = 0.7$ e $\lambda_2 = 0.3$.

La risposta armonica all'ingresso $u(t) = M \cos(\omega t + \varphi)$ è

$$y_{arm}(t) = M |W(e^{j\omega})| \cos\left(\omega t + \varphi + \angle W(e^{j\omega})\right).$$

In questo esercizio $u(t)$ è caratterizzata da $M = 1$, $\omega = \pi/2$, $\varphi = 0$. Calcoliamo i valori del modulo e della fase⁴ di $W(z) = W(e^{j\omega})$ con i dati in esame, ricordando che $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$:

- $|W(e^{j\frac{\pi}{2}})| = |W(j)| = \left| \frac{0.4j}{(j-0.7)(j-0.3)} \right| = \frac{0.4}{\sqrt{1+0.49}\sqrt{1+0.09}} \cong 0.314.$
- $\angle W(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \angle W(j) = \angle \frac{0.4j}{(j-0.7)(j-0.3)} = \angle 0.4j - \angle j - 0.7 - \angle j - 0.3 = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{-0.7}\right) - \pi - \arctan\left(\frac{1}{-0.3}\right) - \pi \cong -2.473 \text{ rad.}$

In definitiva, otteniamo:

$$y_{arm}(t) = 0.314 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 2.473\right).$$

³In questo caso, avendo a disposizione la risposta impulsiva (e quindi la funzione di trasferimento), conosciamo unicamente gli autovalori relativi alle componenti raggiungibili e osservabili dello stato, e non è possibile sapere se vi siano state in $W(z)$ cancellazioni tra poli e zeri che nascondano la presenza di modi naturali instabili. Per questo, possiamo concludere che la parte raggiungibile e osservabile del sistema, che ha autovalori $\lambda_1 = 0.7$ e $\lambda_2 = 0.3$, è senz'altro asintoticamente stabile, e ai fini del senso fisico della risposta armonica non possiamo far altro che affidare nel fatto che eventuali componenti non raggiungibili né osservabili siano anch'esse stabili, oppure che il sistema sia in forma minima (sia completamente raggiungibile e osservabile).

⁴Attenzione al caso in cui la parte reale è negativa: in questa evenienza la funzione arcotangente va corretta con l'addizione di π !

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano, se esistono, esempi di stati con le seguenti proprietà: uno stato raggiungibile, uno stato osservabile, uno stato simultaneamente non raggiungibile e non osservabile.

Svolgimento.

Calcoliamo innanzitutto R , la matrice di raggiungibilità associata alla coppia $[A, B]$ del sistema:

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Non è difficile verificare che R ha rango 3. Poiché lo spazio degli stati raggiungibili \mathcal{P} è definito come $\mathcal{P} = \text{Im}(R)$, si ha subito:

$$\mathcal{P} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Lo spazio degli stati inosservabili I è definito come $I = \mathcal{N}(Q)$. Calcoliamo dunque la matrice di osservabilità Q :

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anch'essa ha rango 3, dunque ci aspettiamo che il nullo di Q abbia dimensione 1 (sia generato da un solo vettore). In effetti, il nullo di Q è soluzione del sistema:

$$Q \cdot x = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -x_4 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Il nullo di Q è dunque generato da qualsiasi vettore del tipo $x = [\alpha \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e scegliendo per semplicità $\alpha = 1$ otteniamo il vettore che funge da base per lo spazio degli stati inosservabili:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Siamo pronti per rispondere al secondo quesito, calcolando i quattro sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman. Richiamiamone brevemente definizioni e proprietà:

- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, sottospazio degli stati raggiungibili e non osservabili;
- \mathcal{X}_2 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{P}$, sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili;
- \mathcal{X}_3 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$, sottospazio degli stati non raggiungibili e non osservabili;
- \mathcal{X}_4 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{C}^n$, sottospazio degli stati non raggiungibili e osservabili.

Il calcolo esplicito dei sottospazi non offre particolari difficoltà. \mathcal{X}_1 è facilmente ottenibile osservando che \mathcal{P} e \mathcal{I} condividono un elemento delle rispettive basi, il vettore $v = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Si ha quindi:

$$\mathcal{X}_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per ottenere \mathcal{P} sarà sufficiente sommare (\oplus) a \mathcal{X}_1 i restanti vettori della base di \mathcal{P} , dunque:

$$\mathcal{X}_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Poiché \mathcal{X}_1 coincide già con \mathcal{I} , \mathcal{X}_3 sarà il sottospazio contenente il solo elemento nullo⁵:

$$\mathcal{X}_3 = \{0\}.$$

Infine, \mathcal{X}_4 si ottiene osservando i sottospazi fin qui generati e completando la base che essi formano (una base di \mathbb{C}^3) in modo da costruire una base per \mathbb{C}^4 . È piuttosto immediato convincersi che con una combinazione lineare dei generatori di \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 non è in alcun modo possibile ottenere il vettore $w = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, e dunque w completa la base cercata:

$$\mathcal{X}_4 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Il calcolo dei quattro sottospazi ci consente di rispondere al terzo quesito.

Per un esempio di stato *raggiungibile* è sufficiente scegliere un vettore appartenente a $\mathcal{P} = \text{Im}(R)$, ovvero contenuto in $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$. Ad esempio, $x_R = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Per un esempio di stato *osservabile* basta scegliere un vettore *non* appartenente a $\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q)$, ovvero t.c. $Q \cdot x_O \neq 0$. Equivale a dire che è sufficiente scegliere un vettore contenuto in $\mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_4$. Ad esempio, $x_O = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

Infine, non esiste un esempio di stato *non raggiungibile e non osservabile*, infatti il sottospazio \mathcal{X}_3 , che contiene tali stati, ha il solo elemento nullo.

⁵E non $\mathcal{X}_3 = \emptyset$, che non costituirebbe un sottospazio (quest'ultimo è tale solo se contiene almeno l'elemento nullo).

Problema 5. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - (x_2(t) + 1)^2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)(x_2(t) + 1) + k(x_2(t) + 1) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, -1)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio, ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Svolgimento.

Come richiesto dal testo del problema, iniziamo con lo studio della stabilità locale, ottenibile mediante il metodo indiretto di Lyapunov (metodo della linearizzazione attorno a x_e). Il metodo consiste nello studio della stabilità dell'approssimazione lineare della dinamica del sistema, descritta dalla matrice Jacobiana di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ calcolata in x_e .

$$J(x(t))|_{x(t)=x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=(0,-1)} = \begin{bmatrix} -2 & -2(x_2 + 1) \\ x_2 + 1 & x_1 + k \end{bmatrix}_{x=(0,-1)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Dunque l'approssimazione lineare del sistema, la cui matrice dinamica è $J(x_e)$, ha autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = k$. Il modo associato al primo autovalore è asintoticamente stabile indipendentemente dal valore di k . La stabilità locale del punto di equilibrio x_e dipende allora dal valore assunto dal secondo autovalore, che è funzione di k . Abbiamo i seguenti casi:

- se $k < 0$ entrambi i modi sono asintoticamente stabili $\implies x_e$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- se $k > 0$ esiste un modo naturale instabile (quello associato all'autovalore λ_2) $\implies x_e$ è instabile;
- se $k = 0$ esiste un modo il cui autovalore ha parte reale nulla ($\lambda_2 = 0$) \implies caso critico del metodo indiretto di Lyapunov, non si possono trarre conclusioni.

Quest'ultimo caso va dunque studiato con il metodo diretto di Lyapunov, che occorrerà applicare al sistema di partenza calcolato per $k = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - (x_2(t) + 1)^2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)(x_2(t) + 1) \end{cases}$$

Come suggerito dal testo, scegliamo una candidata di Lyapunov quadratica, con tutte le caratteristiche richieste dalle ipotesi del Teorema di Lyapunov:

$$V(x) = \frac{\alpha}{2}(x_1 - x_{e1})^2 + \frac{\beta}{2}(x_2 - x_{e2})^2, \quad \alpha, \beta > 0$$

che è derivabile con continuità, è positiva per ogni x e si annulla unicamente in x_e . Inoltre, è radialmente illimitata (ipotesi necessaria ai fini dell'analisi della stabilità globale).

Calcoliamo $\dot{V}(x)$ come segue:

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = [\alpha x_1 \quad \beta(x_2 + 1)] \begin{bmatrix} -2x_1 - (x_2 + 1)^2 \\ x_1(x_2 + 1) \end{bmatrix}$$

da cui

$$\dot{V}(x) = -2\alpha x_1^2 - \alpha x_1(x_2 + 1)^2 + \beta x_1(x_2 + 1)^2$$

nella quale il secondo e il terzo termine possono assumere segno positivo (cosa indesiderata!) per qualche valore di x_1 e dei parametri α e β . Scegliendo invece $\alpha = \beta$ (positivi per ipotesi), i due termini problematici si annullano e sopravvive il solo primo termine, quadratico in x_1 e senz'altro negativo:

$$\dot{V}(x) = -2\alpha x_1^2 \leq 0.$$

La \dot{V} ottenuta è solo semidefinita negativa, infatti, oltre che in x_e , si annulla in tutti gli infiniti punti $(x_1, x_2) = (0, \gamma)$, con $\gamma \in \mathbb{R}$. Per quanto noto dal Teorema di Lyapunov, ciò implica che x_e è semplicemente stabile per $k = 0$.