SCRITTO D'ESAME DI TEORIA DEI SISTEMI del 15/01/2016 (1)

A cura di Vittorio De Iuliis

PROBLEMA 1

Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{40s}{(s+1)(s^2+4)}$$

1) Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$
2) Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso.
3) Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della f.d.t. a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist e il criterio di Routh.

SOLUZIONE

$$W(s) = K \frac{40s}{4(1+s)\left(1+\frac{s^2}{4}\right)} = K \cdot 10 \frac{s}{(1+s)\left(1+\frac{s^2}{4}\right)}$$

Chiamo $W_{AP}(s)$ $W(s)$ calcolato per $K=1 \longrightarrow W_{AP}(s) = 10 \frac{s}{(1+s)\left(1+\frac{s^2}{4}\right)}$

In $W_{AP}(s)$ riconosciamo i seguenti termini:

NOTA: $P_{AP} = 0$

- GUADAGNO: $K_W = 10 \Rightarrow \begin{cases} |K_W|_{dB} = 20 \log_{10}|K_W| = 20\, dB \\ \angle K_W = 0 \end{cases}$

- Termine monomio al numeratore: $s = j\omega$

(nel diagramma dei moduli provoca una pendenza di +20 dB/dec $\forall \omega > 0$. Nel diagramma delle fasi provoca uno spostamento globale di $+\frac{\pi}{2}$ rad).

- Termine binomio al denominatore: $1+s$

$\tau_1 = 1\,s$, $\omega_{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1} = 1\, rad/s$

(nel diagramma dei moduli genera una pendenza di -20 dB/dec da ω_{τ_1} in poi; nel diagramma delle fasi genera una pendenza di $-\pi/4$ rad/dec in $[0.1\omega_{\tau_1}, 10\omega_{\tau_1}] = [0.1, 10]$)

- Termine trinomio al denominatore

$1 + \frac{s^2}{4} \Rightarrow \omega_n = 2\, rad/s$, $\zeta = 0$

(nel diagramma dei moduli provoca una pendenza di -40dB/dec da ω_n in poi. Nel diagramma delle fasi provoca uno spostamento istantaneo di $-\pi$ rad in ω_n!)

NOTA: nei moduli in ω_n c'è un picco di amplificazione infinito!

DIAGRAMMA DEI MODULI

intervallo	pendenza	commento
$\omega < \omega_{T1} = 1\,rad/s$	$+20\,dB/dec$	Azione del termine monomio al numeratore: $+20\,dB/dec$
$1 < \omega < \omega_n = 2\,rad/s$	$0\,dB/dec$	Interviene il termine binomio al denominatore ($-20\,dB/dec$)
$2 < \omega <$	$-40\,dB/dec$	In $\omega_n = 2\,rad/s$ picco di amplificazione infinita e azione del termine trinomio al denominatore ($-40\,dB/dec$) da ω_n in poi

DIAGRAMMA DELLE FASI

intervallo	pendenza	commento
$\omega < 0.1\,\omega_{T1} = 0.1\,rad/s$	$0\,rad/dec$	Nessun contributo
$0.1 < \omega < 10\,\omega_{T1} = 10\,\frac{rad}{s}$	$-\frac{\pi}{4}\,rad/dec$	Contributo del termine binomio al denominatore ($-\frac{\pi}{4}\,rad/dec$) e spostamento istantaneo in ω_n di $-\pi$.
$10 < \omega$	$0\,rad/dec$	Nessun contributo

Denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso:

$$W_{CH}(s) = \frac{K W_{AP}(s)}{1 + K W_{AP}(s)} = \frac{\frac{K40s}{(s+1)(s^2+4)}}{1 + \frac{K40s}{(s+1)(s^2+4)}} = \frac{K40s}{(s+1)(s^2+4) + K \cdot 40s}$$

$$d_{CH}(s) = (s+1)(s^2+4) + K \cdot 40s = s^3 + s^2 + 4s + 4 + K \cdot 40s$$

$$= s^3 + s^2 + (4 + 40K)s + 4$$

(di cui occorre studiare il segno mediante il criterio di Routh)

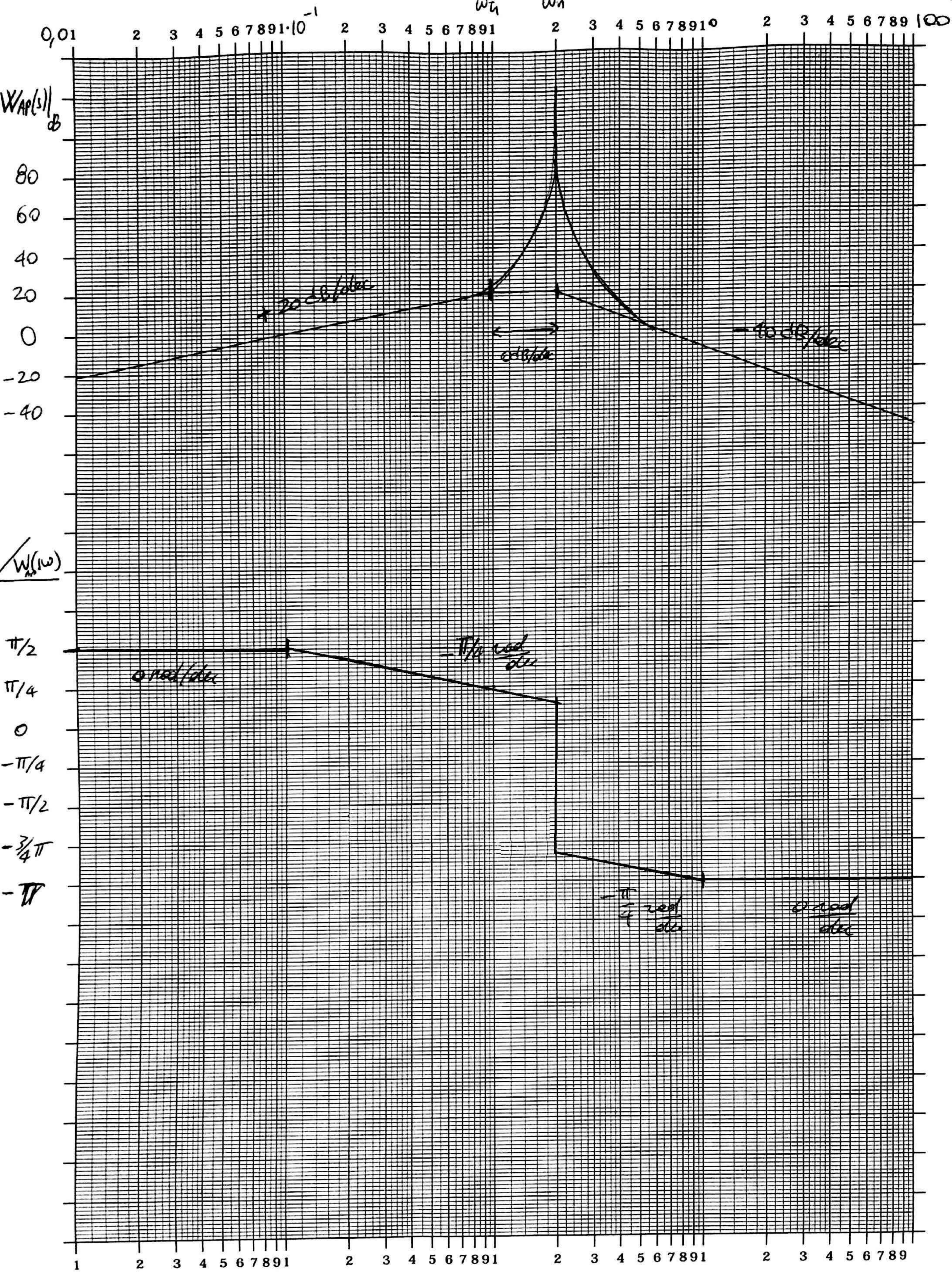
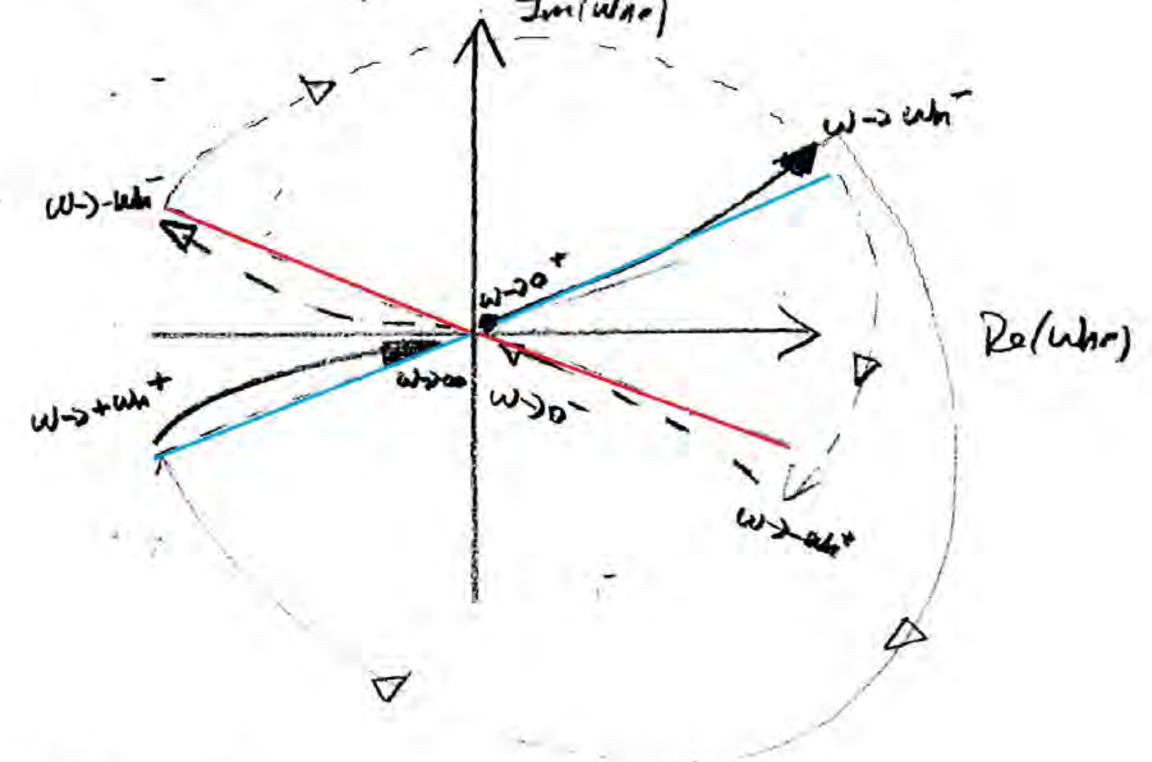
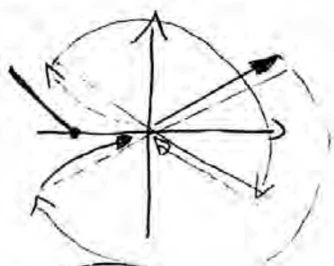

ωT1
ωn
|WAP(s)|dB
80
60
40
20
0
-20
-40
+20dB/dec
0dB/dec
-40dB/dec
/WAP(iω)
π/2
π/4
0
-π/4
-π/2
-3/4π
-π
0 rad/dec
-π/4 rad/dec
-π/4 rad/dec
0 rad/dec

Diagramma polare di $W_{AP}(s)$ (W per $K=1$)



Per questo caso particolare la discussione sulla stabilità di $W_{CH}(s) = \frac{K W_{AP}(s)}{1+K W_{AP}(s)}$ mediante il criterio di Nyquist è piuttosto semplice, poiché il diagramma polare non presenta intersezioni notevoli (diverse dall'origine) con l'asse reale.

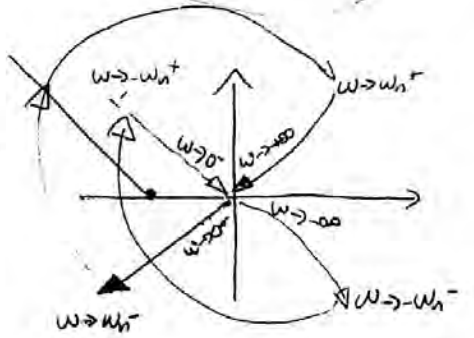
Per $K>0$ si ha



$\hat{N} = 0 \quad \forall K>0$

$P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 0 \rightarrow$ W_{CH} non ha poli a parte reale positiva $\rightarrow$ il sistema controreazionato è stabile $\forall K>0$

Per $K<0$ si ha



$\hat{N} = 2 \quad \forall K<0$

$P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 2$ — W_{CH} ha due poli a parte reale positiva ↳ il sistema controreaz. è INSTABILE $\forall K>0$

Applicando Routh a $d_{CH}(s) = s^3+s^2+(4+40K)s+4$:

3	1	4+40K
2	1	4
1	40K	
0	4	

→ prima colonna 1 1 K 1

→ se $K>0$ nessuna variazione ⇒ $d_{CH}(s)$ ha tutte radici a parte reale negativa
se $K>0$ il sistema controreaz. è STABILE

→ se $K<0$ 2 variazioni ⇒ $d_{CH}(s)$ ha due poli a parte reale positiva, il sistema controreazionato per $K<0$ è INSTABILE

PROBLEMA 2

Sia dato il sistema a tempo continuo $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = [0 \ \ 1]$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali
2. Calcolare la matrice di transizione dello stato $\phi(t) = e^{At}$
3. Calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita e la risposta al gradino unitario.

SOLUZIONE

Procediamo nel dominio del tempo, a partire dalla decomposizione spettrale di A.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{Vmatrix} \lambda & -3 \\ -4 & \lambda+1 \end{Vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+48}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Dunque $\sigma(A) = \{3, -4\}$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 3$ è associato a un modo naturale INSTABILE $(Re(\lambda_1) > 0)$

$\Rightarrow$ $\lambda_2 = -4$ è associato a un modo naturale AS. STABILE $(Re(\lambda_2) < 0)$.

$A = U \Lambda V$ con $U = [u_1 \ u_2]$ matrice degli autovettori destri

$V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}$ matrice degli autovettori sinistri $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

u_1 è t.c. $(\lambda_1 I - A) u_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff u_{1x} = u_{1y} \xRightarrow{u_{1x} = 1} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

u_2 è t.c. $(\lambda_2 I - A) u_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff u_{2y} = -\frac{4}{3} u_{2x} \xRightarrow{u_{2x} = \frac{3}{4}} u_2 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow U = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $V = U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}^T = -\frac{4}{7} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to v_1^T \\ \to v_2^T \end{matrix}$

e si può verificare che $v_i^T \cdot u_j = \delta_{ij}$ e inoltre $C \cdot u_i \neq 0$, $v_i^T \cdot B \neq 0$ $i = 1,2$ (entrambi i modi sono osservabili e eccitabili)

A questo punto per calcolare $\phi(t) = e^{At}$ si utilizza $e^{At} = U e^{\Lambda t} V = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T$

$$\Rightarrow e^{At} = -\frac{4}{7} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[-1 \ \ -\frac{3}{4}\right] - \frac{4}{7} e^{-4t} \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1 \end{bmatrix} [-1 \ \ 1] = -\frac{4}{7} \left(e^{3t} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} + e^{-4t} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = -\frac{4}{7}\begin{bmatrix} -e^{3t}-\frac{3}{4}e^{-4t} & -\frac{3}{4}e^{3t}+\frac{3}{4}e^{-4t} \\ -e^{3t}+e^{-4t} & -\frac{3}{4}e^{3t}-e^{-4t} \end{bmatrix}\cdot}\ 4$$

Calcoliamo la f.d.t. passando per il calcolo della risposta impulsiva del sistema,

$$w(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = Ce^{At}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{4}{7}\begin{bmatrix} -e^{3t}+e^{-4t} & -\frac{3}{4}e^{3t}-e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{4}{7}\left(-e^{+3t}+e^{-4t}\right) = \frac{4}{7}e^{3t} - \frac{4}{7}e^{-4t}.$$

$$\boxed{W(s) = \frac{4}{7}\left(\frac{7}{(s-3)(s+4)}\right) = \frac{4}{(s-3)(s+4)}}$$

$$\Rightarrow W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{4}{7}\frac{1}{s-3} - \frac{4}{7}\frac{1}{s+4}$$

[ricordando che $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$]

La risposta al gradino unitario è la risposta a $u(t) = \delta_{-1}(t) \Longleftrightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow Y_g(s) = W(s)U(s) = W(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{4}{s(s-3)(s+4)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s-3} + \frac{R_3}{s+4}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} s\cdot Y_g(s) = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

$$R_2 = \lim_{s\to 3} Y_g(s)(s-3) = \frac{4}{3\cdot 7} = \frac{4}{21}$$

$$R_3 = \lim_{s\to -4} Y_g(s)(s+4) = \lim_{s\to -4}\frac{4}{s(s-3)} = \frac{4}{-4(-7)} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow Y_g(s) = -\frac{1}{3s} + \frac{4}{21}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{7}\frac{1}{s+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_g(s)\} = -\frac{1}{3}\delta_{-1}(t) + \frac{4}{21}e^{3t} + \frac{1}{7}e^{-4t}}$$

Problema 3

Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = (0.2)^t - (0.5)^t$$

1) Calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

2) Calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica a $u(t) = 6\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})$.

SOLUZIONE

La funzione di trasferimento è ottenibile da $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\}$

Ricordando che $\mathcal{Z}\{a^t\} = \frac{z}{z-a}$, segue subito $W(z) = \frac{z}{z-0.2} - \frac{z}{z-0.5} = -\frac{0.3z}{(z-0.2)(z-0.5)}$

La risposta armonica esiste in quanto la componente raggiungibile e osservabile del sistema sono asintoticamente stabile, ovvero i modi naturali associati agli autovalori $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.5$ sono A.S. $(|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1)$.

Si ha $u(t) = 6\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})$ $\begin{cases} M = 6 \\ \omega = \pi \text{ rad/s} \\ \varphi = \pi/4 \end{cases}$

La $y_{arm}(t) = M|W(e^{j\omega})| \sin(\omega t + \angle W(e^{j\omega}) + \varphi)$

Con:

- $|W(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = |W(-1)| = \left| -\frac{0.3(-1)}{(-1-0.2)(-1-0.5)} \right| = \frac{0.3}{1.2 \cdot 1.5} = \frac{1}{6}$

- $\angle W(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \angle W(-1) = \angle \frac{0.3}{1.2 \cdot 1.5} = 0$ (la fase di un numero reale positivo è zero).

Abbiamo dunque ottenuto:

$$y_{arm}(t) = \cancel{6}\,\frac{1}{\cancel{6}} \sin\left(\pi t + 0 + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y_{arm}(t) = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Problema 4

Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili.
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^3$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 1$, $y(1) = 3$, $y(2) = 9$.

SOLUZIONE

Calcoliamo subito la matrice di raggiungibilità del sistema $R = [B \,|\, AB \,|\, A^2B]$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ che ha rango 1 $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(R)) = 1$

$\mathcal{R} = \mathrm{Im}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e dunque $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ costituisce la base cercata.

Occorre ora della matrice di osservabilità $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ che ha rango 2 $\Rightarrow \dim(\mathcal{N}(Q)) = 1$.

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \{x : Qx = 0\} \qquad Q \cdot x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituisce la base cercata. $\hookrightarrow \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = k \end{pmatrix}$

Ora scriviamo esplicitamente i 4 sottospazi della decomposizione di Kalman:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$ sottospazio degli stati raggiungibili e inosservabili

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$ sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$ sottospazio degli stati non raggiungibili e inosservabili

$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4$ sottospazi degli stati non raggiungibili e osservabili.

essendo $\mathcal{R} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ e $\mathcal{I} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ si ha facilmente che

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{0\}$

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \implies \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \implies \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$

$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3 \implies$ $\mathcal{X}_4$ sia generato da 1 vettore linearmente indipendente dai generatori di $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$. ($\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ genera già $\mathbb{R}^2$)

Si può scegliere ad esempio $\mathcal{X}_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ in quanto $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ è l.i. da $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Il terzo punto ha soluzione immediata. Si scrive $y_{lib}(t) = CA^t x(0)$.

Allora $\begin{bmatrix} y_{lib}(0) \\ y_{lib}(1) \\ y_{lib}(2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}}_{Q} x(0) \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$

risolvendo si ottiene la soluzione $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ ad esempio allora $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Problema 5

Sia dato il sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1-1)^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1-1)^3 + K(x_1 + x_2^2 - 1) - x_2 \end{cases}$

Studiare la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (1,0)$ al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov con $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^4 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, β opportuno. (Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle esplicitamente).

SOLUZIONE: Partiamo dal metodo della linearizzazione, calcolando lo Jacobiano del sistema nel p.to d'equilibrio:

$$J(x)\Big|_{x_e=(1,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} -3(x_1-1)^2 & 1 \\ -3(x_1-1)^2 + K & 2Kx_2 - 1 \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & -1 \end{bmatrix}$$

Ora, per determinare la stabilità locale di $x_e=(1,0)$ è necessario conoscere il segno delle parti reali degli autovalori di $J(x_e)$. Non è però necessario calcolarli esplicitamente: basta infatti applicare la regola di Cartesio al polinomio caratteristico $p(\lambda)$:

$$p(\lambda)=\det(\lambda I - J) = \begin{Vmatrix}\lambda & -1\\ -k & \lambda+1\end{Vmatrix} \Rightarrow \boxed{p(\lambda)=\lambda^2+\lambda-k}$$

Ora, se $k<0$ allora $p(\lambda)$ ha solo radici a parte reale negativa (i coeff. del polinomio hanno tutti lo stesso segno)

se $k>0$ allora $p(\lambda)$ ha una radice a parte reale positiva (c'è una variazione di segno)

↳ se $k<0$ $J(x_e)$ ha due autovalori a parte reale negativa $\Rightarrow$ x_e è localmente asintoticamente stabile

se $k>0$ $J(x_e)$ ha un autovalore a parte reale positiva $\Rightarrow$ x_e è INSTABILE

se $k=0$ $J(x_e)$ ha autovalori $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ e dunque siamo nel caso critico (1 autovalore a parte reale nulla e un autovalore a parte reale negativa)

$\Rightarrow$ per $k=0$ non possiamo concludere niente.

Studiamo il caso critico $k=0$ con il metodo diretto $\Rightarrow$ $\begin{cases}\dot x_1 = -(x_1-1)^3+x_2\\ \dot x_2=-(x_1-1)^3-x_2\end{cases}$

$$V(x)=(x_1-1)^4+\beta x_2^2>0 \quad \text{per } \beta>0.$$

$$\dot V(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4(x_1-1)^3 & 2\beta x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-(x_1-1)^3+x_2\\ -(x_1-1)^3-x_2\end{bmatrix}=-4(x_1-1)^6+\underbrace{4x_2(x_1-1)^3-2\beta x_2(x_1-1)^3}_{\text{termini problematici}}-2\beta x_2^2$$

scegliendo $\beta=2$ (e dunque $V(x)=(x_1-1)^4+2x_2^2$) si ottiene:

(globalmente, V rad. ill.!)

$$\dot V(x)=-4(x_1-1)^6-4x_2^2<0 \quad \forall (x_1,x_2)\neq x_e$$ $\Rightarrow$ x_e asintoticamente stabile per $k=0$

Riassumendo:

$$\begin{cases} k>0 \Rightarrow x_e \text{ è instabile}\\ k<0 \Rightarrow x_e \text{ è localmente asintoticamente stabile}\\ k=0 \Rightarrow x_e \text{ è globalmente asintoticamente stabile.}\end{cases}$$