

PROBLEMA 1

Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{125}{s(s^2 + 5s + 25)}$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. Si calcoli il numero di poli e zeri reali positivi della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ sia con il criterio di Routh che con il criterio di Nyquist.

SOLUZIONE

Analizziamo innanzitutto la funzione di trasferimento in catena diretta (a ciclo aperto) valutata per $K=1$:

$$W_{AP}(s) = W(s) \Big|_{K=1} = \frac{125}{s(s^2 + 5s + 25)}$$

Essa va scritta nella forma di Bode:

$$W_{AP}(s) = \frac{125}{25 \cdot s \cdot \left(1 + \frac{5s}{25} + \frac{s^2}{25}\right)} = \frac{125}{25} \cdot \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{5} + \frac{s^2}{25}\right)} = 5 \cdot \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{5} + \frac{s^2}{25}\right)}$$

Riconosciamo i termini:

- QUADAGNO $K_w = 5 \Rightarrow |K_w|_{dB} = 20 \log_{10} 5 \approx 14 \text{ dB}$
 essendo $K_w > 0$, segue che $\angle K_w = 0$.

- TERMINO MONOMIO al denominatore $s = j\omega$ contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza costante $\forall \omega > 0$ di -20 dB/dec ; inoltre esso sfasava tutto il diagramma delle fasi di $-\frac{\pi}{2}$.

- TERMINO TRINOMIO al denominatore $\left(1 + \frac{s}{5} + \frac{s^2}{25}\right) = \left(1 + \frac{2|\zeta|s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right) \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \zeta = 1/2 \\ \omega_n = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{matrix} \right\}$
 Contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di -40 dB/dec per $\omega > \omega_n$, e al diagramma delle fasi con una pendenza di $-\frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$ in $[0.1\omega_n, 10\omega_n] = [0.5, 50]$

Riepilogo:

DIAGRAMMA DEI MODULI

intervallo	pendenza	commento
$\omega < \omega_n = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	-20 dB/dec	Prima di ω_n agisce il solo termine numerico
$5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \leq \omega$	-60 dB/dec	Da ω_n in poi. Azione combinata di: termine numerico (-20 dB/dec) e triennio $(-40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}})$

NOTE: il diagramma passa per il punto $(\omega, \text{dB}) = (1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, 14 \text{ dB})$

• essendo $\zeta = 0.5$ non solo non si sono picchi di amplificazione/attenuazione in corrispondenza di ω_n , ma si può dire che il diagramma approssima molto bene il comportamento del diagramma reale con il diagramma asintotico (anzi visibile).

DIAGRAMMA DELLE FASI

intervallo	pendenza	commento
$\omega < 0.1 \omega_n = 0.5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$	0 rad/dec	Nessun contributo
$0.5 < \omega < 10 \omega_n = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$-\frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$	Azione del termine triennio $-\frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$ in $[0.1 \omega_n, 10 \omega_n]$
$50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} < \omega$	0 rad/dec	Nessun contributo

NOTE: il diagramma delle fasi è uniformemente sfasato di $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ per la presenza del termine numerico al denominatore

• l'approssimazione ottenibile con il diagramma asintotico è solo parziale, in quanto il diagramma asintotico su 2 decadi per $\zeta = 1/2$ è piuttosto approssimativa rispetto al diagramma reale.

Si può migliorare l'approssimazione con una retta di pendenza $-\frac{\pi}{2 \log(\alpha)}$

con $\alpha = 5\zeta + \sqrt{25\zeta^2 + 1}$ tra $\frac{\omega_n}{\alpha}$ e $\alpha \omega_n$. In questo caso:

$$\alpha \approx 5.2 \quad \left[\frac{\omega_n}{\alpha}, \alpha \omega_n \right] = [0.96, 26] \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2 \log(\alpha)} \approx -2.2 \text{ rad/dec}$$

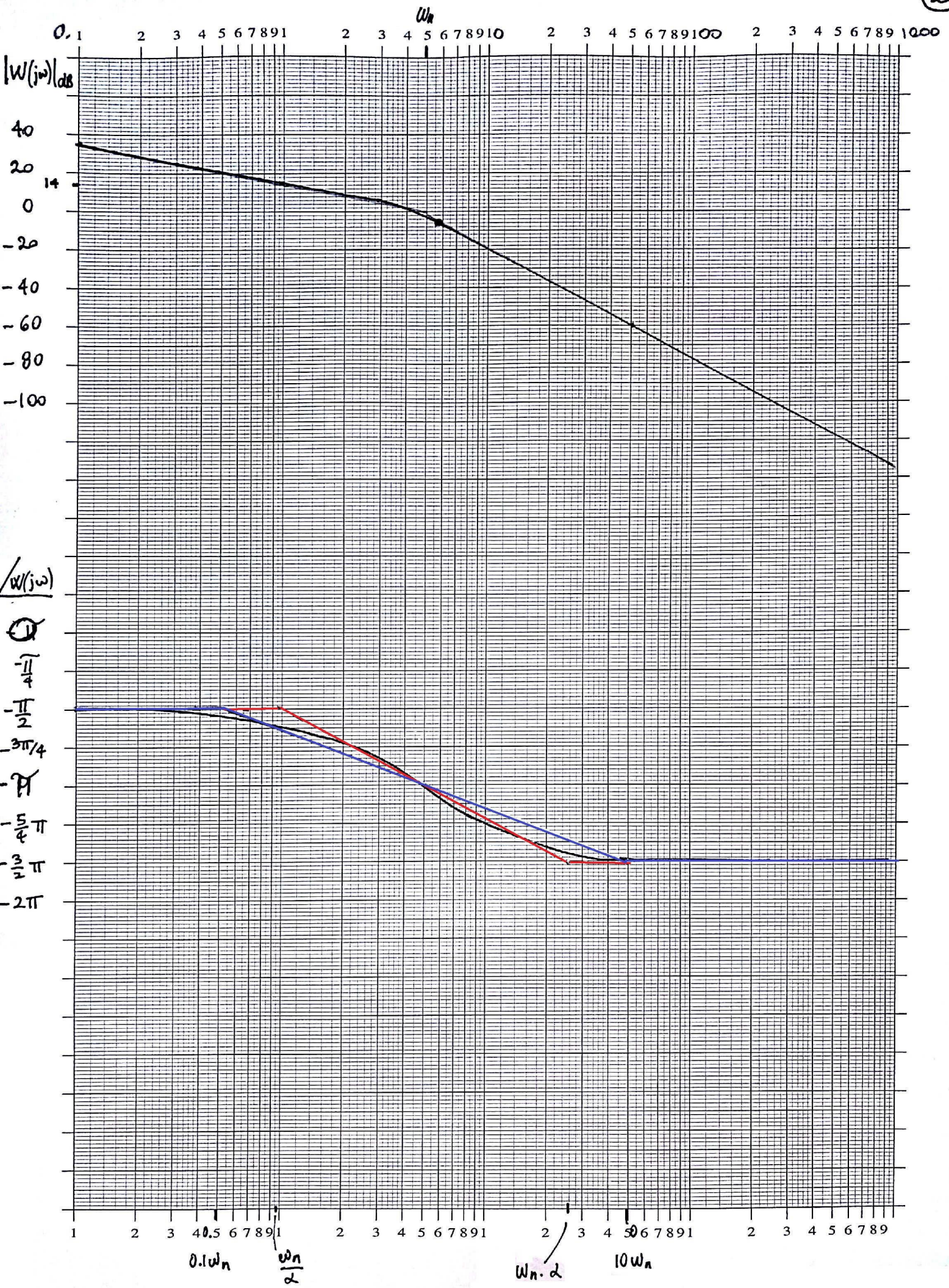
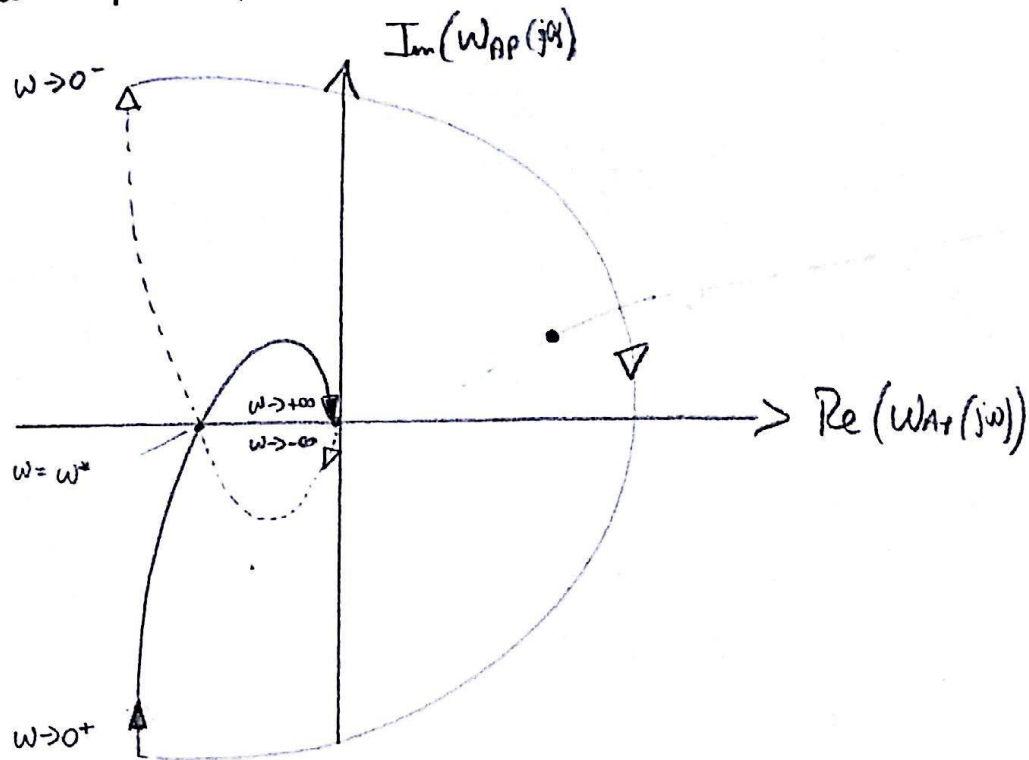


Diagramma polo per $K=1$



Calcoliamo per quale pulsazione $\omega = \omega^*$ il tracciato del diagramma di $W_{AP}(j\omega)$ (= $W(j\omega)$ per $K=1$) interseca l'asse reale:

$$\text{Im}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{125}{j\omega(-\omega^2 + 5j\omega + 25)} \right\} = 0 \Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{1}{-j\omega^3 - 5\omega^2 + 25j\omega} \right\} = 0$$

Moltiplico numeratore e denominatore per il compl. coniugato del denominatore:

$$\Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{-5\omega^2 + j(\omega^3 - 25\omega)}{[-5\omega^2 - j(\omega^3 - 25\omega)][-5\omega^2 + j(\omega^3 - 25\omega)]} \right\} = 0 \Leftrightarrow \text{Im} \left\{ -5\omega^2 + j(\omega^3 - 25\omega) \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega(\omega^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \text{ (soluzione banale)} \text{ oppure } \boxed{\omega^* = \pm 5 \text{ rad/s}}$$

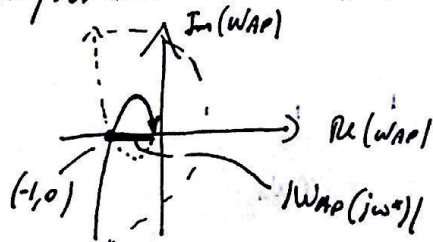
con valore $\omega^* = 5 \text{ rad/s}$

Calcolo ora il modulo di $W(j\omega)|_{\omega=\omega^*}$:

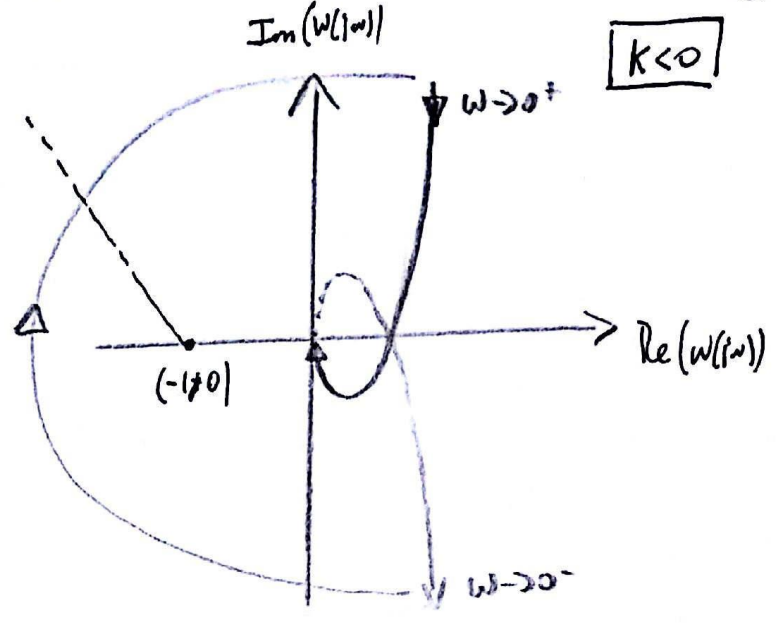
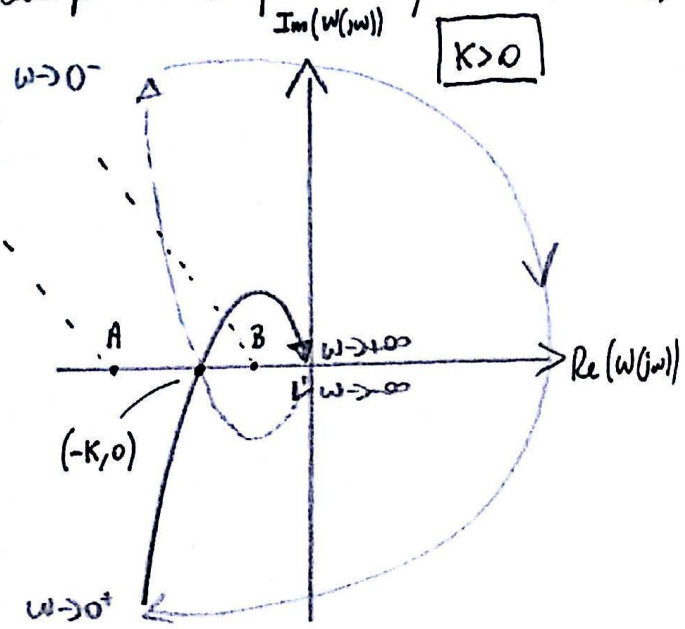
$$|W(j\omega^*)| = \left| \frac{125}{j5(-25 + 25j + 25)} \right| = \frac{125}{|j5| \cdot |j25|} = \frac{125}{5 \cdot 25} = 1$$

Dunque il diagramma di $W_{AP}(j\omega) = W(j\omega)|_{K=1}$ interseca l'asse reale nel punto

$(-1 \neq 0)$:



Disegnare i due diagrammi polari di $W(j\omega)$ al variare di K secondo:



se $(-1, 0)$ è in (A) : $\hat{N} = 0$
 se $(-1, 0)$ è in (B) : $\hat{N} = -2$

$\hat{N} = -1 \quad \forall K < 0$

Nel caso $K < 0$ è evidente che il punto critico $-1+j0$ è sempre interno alla sola curva all'infinito del diagramma $\Rightarrow \forall K < 0 \quad \hat{N} = -1$.

Nel caso $K > 0$, se $0 < K < 1$, allora il punto $-1+j0$ è ESTERNO al diagramma (è in A) e dunque $\hat{N} = 0$. Se invece $K > 1$ il punto $-1+j0$ è INTERNO al diagramma (è in B) e dunque $\hat{N} = -2$

Poiché $P_{AP} = 0$ (un polo in $s=0$ e due poli complessi coniugati e parte reale $-\frac{5}{2}$)

si ha che:

- $K < 0 \Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 0 + 1 = 1 \neq 0$ per $K < 0$ il sistema controresonante è **INSTABILE**
- $0 < K < 1 \Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 0 + 0 = 0$ per $0 < K < 1$ il sistema controresonante è **STABILE**
- $K > 1 \Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 0 + 2 = 2 \neq 0$ per $K > 1$ il sistema controresonante è **INSTABILE**

Conferma dei risultati ottenuti con il criterio di Nyquist calcolando il denominatore della f.d.t. e ciclo chiuso ed esso il criterio di Routh.

$$W_{CH}(s) = \frac{W_{AP}(s)}{1 + W_{AP}(s)} = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} = \frac{K \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)} = \frac{N_{CH}(s)}{D_{CH}(s)}$$

$$\Rightarrow D_{CH}(s) = D(s) + KN(s) = s(s^2 + 5s + 25) + K \cdot 125 = s^3 + 5s^2 + 25s + K \cdot 125$$

Tabella di Routh :

3	1	25		3	1	25
2	5	$K \cdot 125$		2	5	$K \cdot 125$
1	$25(1-K)$		FD	1	$1-K$	
0	$125 \cdot K$			0	K	

prime colonne

	1	5	$1-K$	K	
1/5	+	-	+	+	
1-K	+	+	-	-	1-K > 0 \Leftrightarrow K < 1
K	-	0	+	+	
	K < 0	K ∈ (0, 1)	K > 1		
	1V	0V	2V		

Di conseguenza :

se $K < 0$ $d_{CH}(s)$ non ha radici a parte reale positiva $\Rightarrow W_{CH}(s)$ è INSTABILE

$0 < K < 1$ $d_{CH}(s)$ non ha radici a parte reale positiva $\Rightarrow W_{CH}(s)$ è STABILE

$K > 1$ $d_{CH}(s)$ ha due radici a parte reale positiva $\Rightarrow W_{CH}(s)$ è INSTABILE.

Il risultato ottenuto conferma l'analisi ottenuta con il criterio di Nyquist.

PROBLEMA 2

Dato un sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 0]$

(4)

con autovalori $\lambda_1 = 1+j$, $\lambda_2 = 1-j$.

Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1 associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad l_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j \end{bmatrix}$$

1. Calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$
2. Descrivere le proprietà dei modi naturali del sistema
3. Calcolare la risposta impulsiva $w(t)$

SOLUZIONE

Essendo $\lambda_1 = \lambda_2^*$ segue facilmente che $r_2 = r_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$ e $l_2 = l_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}j \end{bmatrix}$

Dunque $R = [r_1 \ r_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}j \end{bmatrix}$

Essendo inoltre $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}$ dalle decomposizioni

spettrali di una matrice sappiamo che

$$\begin{cases} A = R \Lambda L = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i l_i \\ A^t = R \Lambda^t L = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t r_i l_i \end{cases}$$

Perché $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $r_1 = r_2^*$, $l_1 = l_2^*$ si ha:

$$\begin{aligned} A &= 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1 r_1 l_1 \} = 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} [1 \ -j] \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ (1+j) \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 1+j & -j+1 \\ j-1 & 1+j \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^t &= 2 \operatorname{Re} \{ \lambda_1^t r_1 l_1 \} = 2 \operatorname{Re} \left\{ (1+j)^t \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}j \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ (1+j)^t \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ |1+j|^t e^{j \frac{\pi}{4} t} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}^t e^{j \frac{\pi}{4} t} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{2}^t \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Da cui si ottiene:

$$A^t = \sqrt{2}^{-t} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{bmatrix}$$

verificare che $A^0 = I$

$$A^t = A$$

Per questo concerne i modi naturali, si ha che:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow \text{entrambi gli autovalori sono maggiori di 1 e modi naturali INSTABILI}$$

ECCITABILITÀ per impulsi in ingresso:

$$L_1 \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \neq 0 \quad (\text{ovviamente } L_2 \cdot B \neq 0)$$

OSSERVABILITÀ in uscita:

$$C \cdot M_i = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \quad (\text{ovviamente } C \cdot M_2 \neq 0)$$

↳ entrambi i modi naturali non eccitabili e osservabili:

Calcolo la risposta impulsiva:

$$w(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & \text{se } t > 0 \\ D & \text{se } t = 0 \end{cases} = \begin{cases} CA^{t-1}B & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$$w(t)_{t>0} = CA^{t-1}B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-t+1} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) & \sqrt{2}^{-t+1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \\ -\sqrt{2}^{-t+1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) & \sqrt{2}^{-t+1} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \sqrt{2}^{-t+1} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \right]$$

PROBLEMA 3

Sia dato un sistema a tempo continuo ad un ingresso e un'uscita caratterizzata dalle seguenti risposte impulsive: $w(t) = 2e^{-3t} + e^{-t}$.

Si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 3 \sin(t)$

SOLUZIONE

Calcoliamo innanzitutto la f.d.t. del sistema, per $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$

Si ha: $W(s) = 2\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+5}{(s+3)(s+1)}$

La risposta al gradino $y_g(s) = W(s) \cdot U(s)$ con $U(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow Y_g(s) = \frac{3s+5}{s(s+3)(s+1)}$, per ottenere $y_g(t)$ occorre calcolare l'antitrasformata:

$Y_g(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+3} + \frac{R_3}{s+1}$ con
 $R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} Y_g(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s+5}{(s+3)(s+1)} = \frac{5}{3}$
 $R_2 = \lim_{s \rightarrow -3} Y_g(s)(s+3) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{3s+5}{s(s+1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$
 $R_3 = \lim_{s \rightarrow -1} Y_g(s)(s+1) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s+5}{(s+3)s} = \frac{2}{-2} = -1$

$\Rightarrow Y_g(s) = \frac{5/3}{s} - \frac{2/3}{s+3} + \frac{1}{s+1} \Rightarrow y_g(t) = \frac{5}{3} f_1(t) - \frac{2}{3} e^{-3t} - e^{-t}$

La risposta armonica esiste in quanto i moduli naturali e regolari del sistema non presentano zeri $[w(t) = 2e^{-3t} + e^{-t} \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1, \text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i=1,2]$.

$u(t) = 3 \sin(t) \begin{cases} n=3 \\ \varphi=0 \\ \omega=1 \text{ rad/s} \end{cases} \Rightarrow y_{\text{form}}(t) = 3 |W(j\omega)|_{\omega=1} \cdot \sin(t + \angle W(j\omega)|_{\omega=1})$

$|W(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{|3j\omega+5|}{|j\omega+3||j\omega+1|} \Big|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{9+25}}{\sqrt{9+1}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{20}} \approx 1.30$

$\angle W(j\omega)|_{\omega=1} = \angle \frac{3j+5}{(j+3)(j+1)} = \angle(3j+5) - \angle(j+3) - \angle(j+1) = \arctan(\frac{3}{5}) - \arctan(\frac{1}{3}) - \arctan(1) \approx -0.567 \text{ rad}$

$\Rightarrow y_{\text{form}}(t) = 3.9 \cdot \sin(t - 0.567)$

PROBLEMA 4 Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dove: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 1 \ 0]$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati osservabili.
2. Si individuino i 4 sottospazi X_1, X_2, X_3, X_4 della decomposizione strutturale di Kalman.
3. Fornire un esempio di stato simultaneamente raggiungibile e osservabile e un esempio di stato simultaneamente non raggiungibile e osservabile.

SOLUZIONE

Primo passo del calcolo di $R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ che ha rango 2

per semplicità, si può scegliere: $\mathcal{R} = \text{Im}\{R\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Per quanto riguarda la matrice di osservabilità:

$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ che ha rango 2 (infatti $-\frac{1}{3}(q_1 - q_2) = q_3$) $\Rightarrow \dim(\mathcal{N}(\mathcal{Q})) = 1$

$\mathcal{I} = \mathcal{N}(\mathcal{Q})$; $\mathcal{N}(\mathcal{Q}) = \alpha$ t.c. $\mathcal{Q} \cdot x = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -3x_1 = -x_3 \\ \mathcal{Q} = 0 \end{cases}$

per $x_1 = 1$ si ha $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{N}(\mathcal{Q}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

Individuiamo ora i 4 sottospazi della decomposizione di Kalman:

- $X_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$ sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili
- X_2 è t.c. $X_1 \oplus X_2 = \mathcal{R}$ sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili.
- X_3 è t.c. $X_1 \oplus X_3 = \mathcal{I}$ sottospazio degli stati non raggiungibili e osservabili
- X_4 è t.c. $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = \mathbb{R}^3$ sottospazio degli stati non raggiungibili e osservabili.

$X_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$ non è univoco possibile generare $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ con $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

X_2 è t.c. $X_1 \oplus X_2 = \mathcal{R} \Rightarrow X_2 = \mathcal{R} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

6

\mathcal{X}_3 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

\mathcal{X}_4 t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3$

essendo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ l.i. da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ genera tutto \mathbb{R}^3

cos' implica che $\mathcal{X}_4 = \{\emptyset\}$.

Il loro punto chiede di fornire note appropriate, rispettivamente, a \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_4 , che pur' contengono il solo vettore nullo.

PROBLEMA 5

Sia dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1-k)x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1-k)x_2 \end{cases}$$

Studia la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ usando il metodo delle linearizzazioni attorno al punto d'equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.

SOLUZIONE

Iniziamo dal metodo delle linearizzazioni, calcolando $J(x)|_{x_e}$.

$$J(x)|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 3(1-k)x_1^2 & 1 \\ -1 & (1-k) \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-k \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - J(x_e)) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - (1-k) \end{bmatrix} = \lambda^2 + (k-1)\lambda + 1 = p(\lambda)$$

Per verificare il segno della parte reale degli autovalori di $J(x_e)$ si utilizza il criterio di Routh applicato ai coefficienti di $p(\lambda)$: 1, k-1, 1

se $k-1 > 0 \Rightarrow k > 1$, non vi sono variazioni di segno e dunque tutti gli autovalori di $J(x_e)$ hanno parte reale negativa $\Rightarrow x_e$ è l.c. Asint. stabile

se $k-1 < 0 \Rightarrow k < 1$, vi sono due variazioni di segno \Rightarrow gli autovalori di $J(x_e)$ hanno entrambi parte reale positiva $\Rightarrow x_e$ è INSTABILE.

se $k=1$ entrambi gli autovalori hanno parte reale nulla \Rightarrow CASO CRITICO.

Discutiamo il caso critico $K=1$ sostituendo tale valore nel sistema di portanza:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad \text{Abbiamo ottenuto un sistema lineare di grado 2 con} \\ \text{e' necessario applicare il criterio di Lyapunov.}$$

E' sufficiente infatti calcolare gli autovalori della matrice dinamica del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{FD } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \quad \text{FD } A \text{ ha due autovalori complessi coniugati} \\ \lambda = \pm i \quad \text{e parte reale nulla FD per } K=1 \text{ } x_e \text{ e' } \begin{matrix} \text{SEMPLICEM.} \\ \text{STABILE} \end{matrix}$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} \text{se } K < 1 & \text{se } x_e \text{ e' INSTABILE} \\ \text{se } K = 1 & \text{se } x_e \text{ e' SEMPLICEMENTE STABILE} \\ \text{se } K > 1 & \text{se } x_e \text{ e' LOCALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE} \end{cases}$$