SCRITTO DI TEORIA DEI SISTEMI del 16/02/2016

PROBLEMA 1

Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{8(s-5)}{(s+1)(s^2+4)}$$

1) Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$.
2) Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso.
3) Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della f.d.t. a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

SOLUZIONE

$$W(s) = K \frac{8(s-5)}{(s+1)(s^2+4)} = K \cdot \frac{\cancel{8}^{\,2} \cdot (-5)\left(1-\frac{s}{5}\right)}{(s+1)\cdot \cancel{4}\left(1+\frac{s^2}{4}\right)} = -10K \frac{\left(1-\frac{s}{5}\right)}{(s+1)\left(1+\frac{s^2}{4}\right)}$$

Chiamiamo $W_{AP}(s)$ $W(s)$ calcolata per $K=1$ $\Rightarrow$ $W_{AP}(s) = -10 \frac{\left(1-\frac{s}{5}\right)}{(1+s)\left(1+\frac{s^2}{4}\right)}$

In $W_{AP}(s)$ riconosciamo i seguenti termini:

GUADAGNO: $K_W = -10 \Rightarrow \begin{cases} |K_W|_{dB} = 20\log_{10}|K_W| = 20\,dB \\ \angle K_W = \pi \end{cases}$

Termine binomio al numeratore:

$\left(1-\frac{s}{5}\right) \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{5}s,\ \omega_{\tau_2} = \frac{1}{\tau_2} = 5\ rad/s$

(provoca una pendenza di $+20\,dB/dec$ da ω_{τ_2} in poi nel diagramma dei moduli, e una pendenza di $-\pi/4$ rad/dec nell'intervallo $[0.5, 50]$ rad/s nel diagramma delle fasi)

Termine binomio al denominatore:

$(1+s) \rightarrow \tau_1 = 1s,\ \omega_{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1} = 1\ rad/s$

(provoca una pendenza di $-20\,dB/dec$ da ω_{τ_1} in poi nel diagramma dei moduli, e una pendenza di $-\pi/4$ rad/dec in quello delle fasi in $[0.1, 10]$ rad/s)

Termine trinomio non smorzato al denominatore:

$\left(1+\frac{s^2}{4}\right) \rightarrow \omega_n = 2\ rad/s,\ \zeta = 0.$

(provoca una pendenza di $-40\,dB/dec$ da ω_n in poi nel diagramma dei moduli, con un picco di amplificazione infinito in ω_n. Nel diagramma delle fasi sfasa di $-\pi$ tutto il diagramma in corrispondenza di ω_n).

DIAGRAMMA DEI MODULI :

pulsazione	pendenza	commento
$\omega < \omega_{\tau_1} = 1$	0 dB/dec	Nessun contributo
$1 < \omega < \omega_{P} = 2$	-20 dB/dec	Contributo del solo termine binomio al denominatore
$2 < \omega < \omega_{\tau_2} = 5$	-60 dB/dec	Contributo di binomio al denominatore e trinomio (con picco in ω_n)
$5 < \omega$	-40 dB/dec	Contributo di tutti i termini.

DIAGRAMMA DELLE FASI

pulsazione	pendenza	commento
$\omega < 0.1\omega_{\tau_1} = 0.1$	0 rad/dec	Nessun contributo
$0.1 < \omega < 0.1\,\omega_{\tau_2} = 0.5$	$-\frac{\pi}{4}$ rad/dec	Interviene il termine binomio al denominatore
$0.5 < \omega < 10\,\omega_{\tau_1} = 10$	$\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$ rad/dec	Interviene il termine binomio al numeratore (con segno negativo!). Sfasamento di $-\pi$ in $\omega_n = 2$.
$10 < \omega < 10\,\omega_{\tau_2} = 50$	$-\frac{\pi}{4}$ rad/dec	Solo termine binomio al numeratore
$50 < \omega$	0 rad/dec	Nessun contributo.

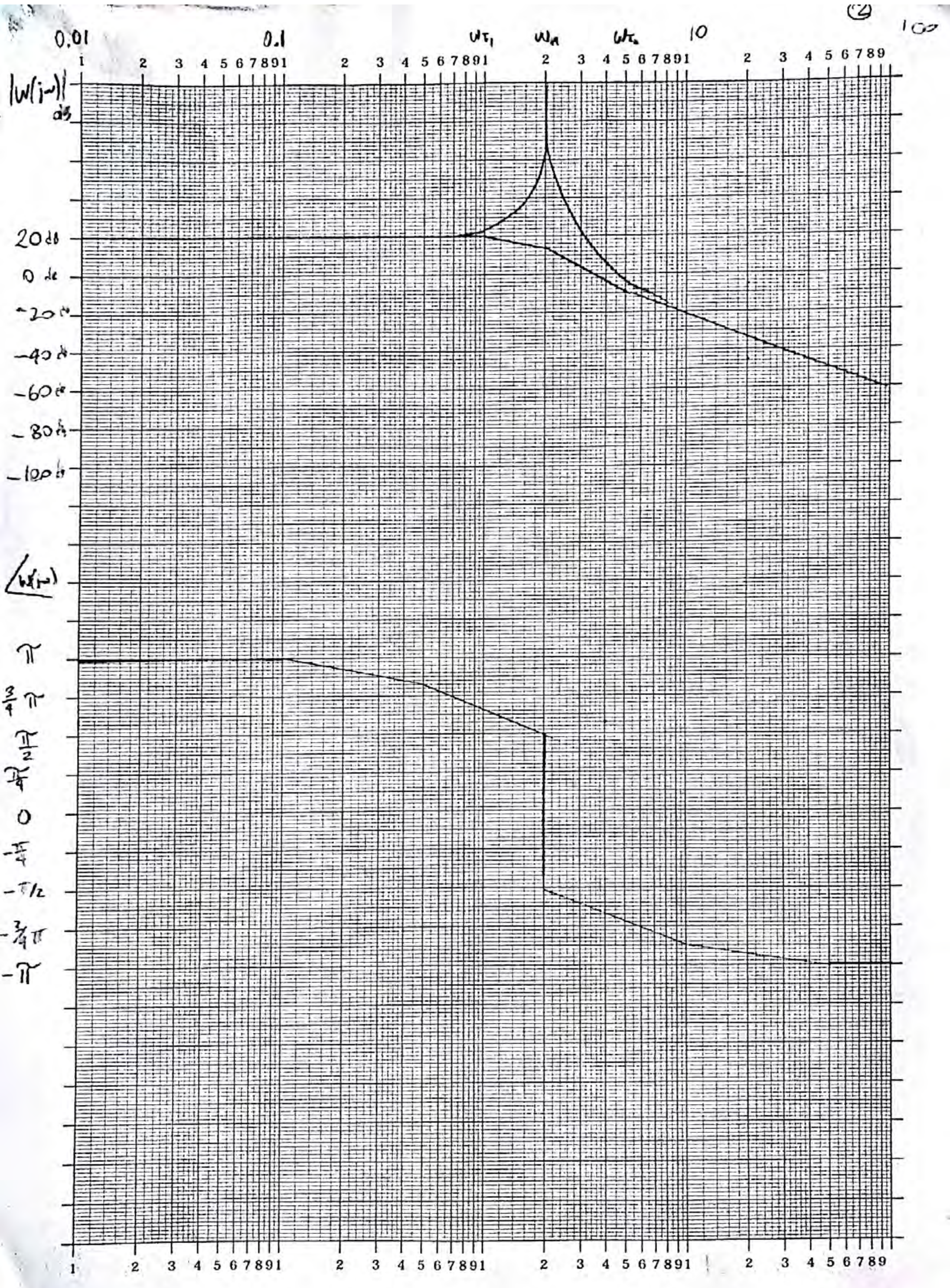
Denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso:

$$W_{CH}(s) = \frac{KW_{AP}(s)}{1 + KW_{AP}(s)} = \frac{8K\frac{(s-5)}{(s+1)(s^2+4)}}{1 + 8K\frac{(s-5)}{(s+1)(s^2+4)}} = \frac{8K(s-5)}{(s+1)(s^2+4) + 8K(s-5)}$$

$$d_{CH}(s) = (s+1)(s^2+4) + 8K(s-5) = s^3 + 4s + s^2 + 4 + 8Ks - 40K$$

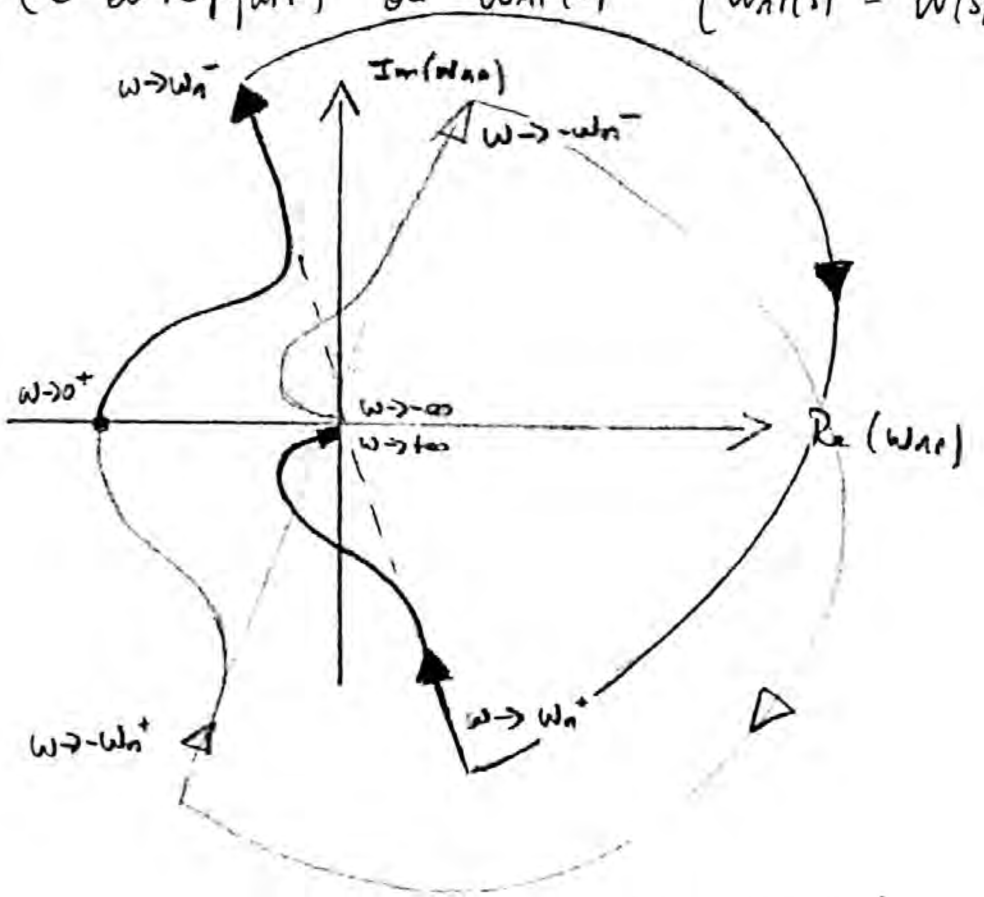
$$= s^3 + s^2 + (8K+4)s + 4(1-10K)$$

$$\left(= s^3 + s^2 + (8K+4)s + 4 - 40K\right)$$



②
0.01
0.1
ωT1
ωn
ωT2
10
100
|W(jω)| dB
20 dB
0 dB
-20 dB
-40 dB
-60 dB
-80 dB
-100 dB
∠W(jω)
π
3/4 π
π/2
π/4
0
-π/4
-π/2
-3/4 π
-π

Diagramma polare (o di Nyquist) di $W_{AP}(s)$ $[W_{AP}(s) = W(s)$ per $k=1]$

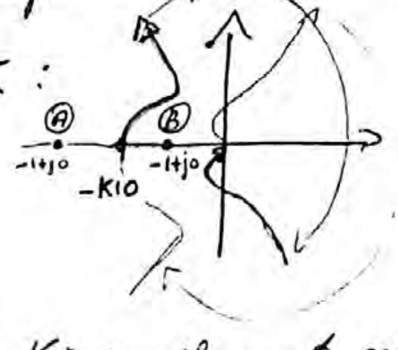


È semplice osservare che l'unica intersezione (diversa dall'origine) della curva polare di $W_{AP}(j\omega)$ con l'asse reale si ha in corrispondenza di $\omega = 0$ rad/s e in particolare

$|W(j\omega)|\big|_{\omega=0} = |K_W| = 10 \;\mapsto$

Ora, consideriamo l'evoluzione del diagramma polare al variare di K

Per $K>0$ si ha un diagramma polare analogo a quello appena disegnato, scalato di un fattore K:



Caso (A): $\overset{\frown}{N} = 0$

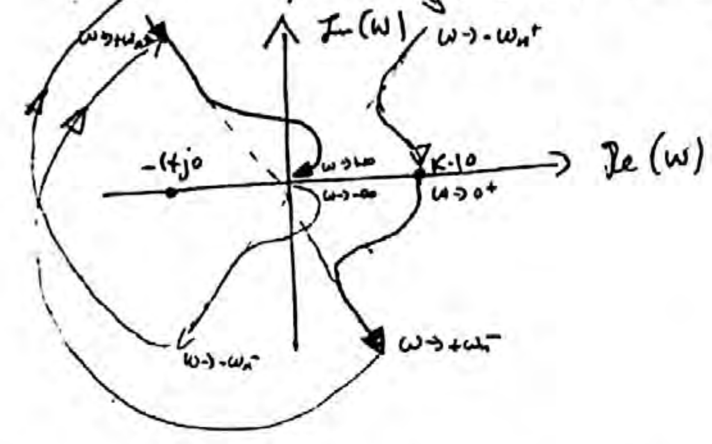
Caso (B): $\overset{\frown}{N} = -1$

Chiaramente, al variare di $K>0$ il punto critico $-1+j0$ può essere dentro o fuori il tracciato della curva (rispettivamente in (B) o (A)).

Chiaramente se $K \cdot 10 > 1$ ovvero se $K > \frac{1}{10}$ $-1+j0$ è INTERNO (caso (B))

Altrimenti se $K \cdot 10 < 1$ ovvero se $0 < K < \frac{1}{10}$ $-1+j0$ è ESTERNO (caso (A))

Se invece $K<0$ il diagramma polare è ruotato di 180°: ③



$\overleftarrow{N} = -2 \quad \forall K<0$

Ed è evidente che $\forall K<0$ il punto critico $-1+j0$ è sempre esterno al tracciato (ma interno rispetto alla chiusura all'infinito!)

Essendo $P_{AP} = 0$ (la f.d.t. a ciclo aperto non ha poli a parte reale positiva) si ha:

Per $K>0$:

- $K>\frac{1}{10}$ ⟼ $P_{CH} = P_{AP} - \overleftarrow{N} = 0+1 = 1$ → il sistema controreazionato è INSTABILE (ha 1 polo a parte reale positiva)
- $0<K<\frac{1}{10}$ ⟼ $P_{CH} = P_{AP} - \overleftarrow{N} = 0$ → il sistema controreazionato è STABILE

Per $K<0$ ⟼ $P_{CH} = P_{AP} - \overleftarrow{N} = 0+2 = 2$ → il sistema controreazionato è INSTABILE (ha 2 poli a parte reale positiva!)

Applichiamo il criterio di Routh a $d_{CH}(s)$ e verifichiamo i risultati appena ottenuti:

$d_{CH}(s) = s^3 + s^2 + (8K+4)s + 4 - 40K$ da cui si ottiene la tabella:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8K+4 \\ 2 & 1 & 4-40K \\ 1 & 48K & \\ 0 & 4-40K & \end{array} \;\longmapsto\; \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8K+4 \\ 2 & 1 & 4-40K \\ 1 & K & \\ 0 & 1-10K & \end{array}$$

prima colonna: ⟼ $1 \quad 1 \quad K \quad 1-10K$

1	+	+	+
1	+	+	+
K	−	0 +	+
1−10K	+	+	1/10 −
	2V	0V	1V

Dunque per $K<0$ ⟼ 2 variazioni ⟼ d_{CH} ha due radici a parte reale positiva

$0<K<1/10$ ⟼ 0 variazioni ⟼ d_{CH} non ha radici positive

$K>1/10$ ⟼ 1 variazione ⟼ d_{CH} ha una radice positiva. (Stessi risultati ottenuti con Nyquist)

Problema 2

Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Discutere le proprietà dei modi naturali

2) Calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera è $x_{es}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$

3) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

SOLUZIONE

Gli autovalori della matrice A (triangolare bassa) sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

Poiché $Re(\lambda_1) < 0$, $Re(\lambda_2) < 0$, entrambi i modi naturali ad essi associati sono asintoticamente stabili.

Calcolo gli autovettori destri r_1, r_2 e sinistri l_1, l_2 t.c. $\begin{cases} l_i \cdot r_i = 1 \\ l_i \cdot r_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$

$$r_1: \ (\lambda_1 I - A) r_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = -2x \implies r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$r_2: \ (\lambda_2 I - A) r_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \iff r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e sarà $L = R^{-1} = \dfrac{1}{det(R)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \leftarrow l_1 \\ \leftarrow l_2 \end{array}$

Si verifica facilmente che $A = R \Lambda L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Eccitabilità e osservabilità:

$C \cdot r_1 = [1 \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad C \cdot r_2 = [1 \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0 \implies$ entrambi i modi sono osservabili in uscita

$l_1 \cdot B = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad l_2 \cdot B = [2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \implies$ entrambi i modi sono eccitabili per impulsi in ingresso

Avendo calcolato $A = R \Lambda L$ è immediato ottenere $e^{At} = R e^{\Lambda t} L = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} u_i l_i$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ -2e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera dello stato è data da $x_{eb}(t) = e^{At} x(0)$

Affinché sia $\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$ si ha subito che:

$$\begin{cases} x_1 e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow x_1 = 1 \\ -2e^{-t} x_1 + 2e^{-2t} x_1 + e^{-2t} x_2 = -2e^{-t} \Leftrightarrow \cancel{-2e^{-t}} + 2e^{-2t} + \cancel{2e^{-t}} = -e^{-2t} x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow X_2 = -2$ dunque $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Per giungere al calcolo di $W(s)$ passiamo per la risposta impulsiva:

$$w(t) = C e^{At} B + D\delta(t) = C e^{At} B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} = 3e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} - 2\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}.$$

PROBLEMA 3

Si consideri un sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva: $w(t) = (0.5)^{t-1}$, $w(0) = 0$.

Utilizzando la trasformata $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ si calcoli la risposta al gradino unitario e la risposta armonica alla sequenza d'ingresso $u(t) = \begin{cases} -2 & \text{per } t \text{ pari} \\ +2 & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$ $t \geq 0$, $u(t) = 0$ $t < 0$

(dopo averla scritta come una funzione sinusoidale).

SOLUZIONE

Calcoliamo innanzitutto $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\}$. Ricordando che $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \frac{F(z)}{z}$ si ha:

$$W(z) = \frac{\mathcal{Z}\{0.5^t\}}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{z}{z-0.5} = \frac{1}{z-0.5}$$

Risposta al gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t)$. Vale $U(z) = \mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{z}{z-1}$

$$Y_g(z) = W(z)\,U(z) = \frac{1}{z-0.5}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)}$$

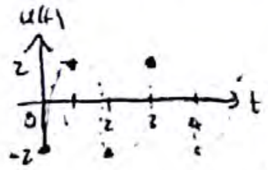
$y_g(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_g(z)\}$ $\qquad \frac{Y_g(z)}{z} = \frac{R_1}{z-0.5} + \frac{R_2}{z-1}$ con $R_1 = \lim_{z \to 0.5} (z-0.5)\frac{Y_g(z)}{z} = \lim_{z \to 0.5} \frac{1}{z-1}$

$\Rightarrow R_1 = -\frac{1}{0.5} = -2$

$R_2 = \lim_{z \to 1} (z-1)\frac{Y_g(z)}{z} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z-0.5} = 2$ $\Rightarrow \frac{Y_g(z)}{z} = -\frac{2}{z-0.5} + \frac{2}{z-1}$ $\Rightarrow Y_g(z) = -\frac{2z}{z-0.5} + \frac{2z}{z-1}$

Allora $y_g(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_g(z)\} = -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2\,\delta_{-1}(t)$.

La sequenza $u(t) = \begin{cases} -2 & t \text{ pari} \\ 2 & t \text{ dispari} \end{cases}$ $t \geq 0$, $u(t) = 0$ $t < 0$ si scrive facilmente in forma sinusoidale osservando che



$\Rightarrow T = 2 \Rightarrow$

$u(t) = M\cos(\omega t)$ con $M = -2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ $\Rightarrow u(t) = -2\cos(\pi t)$, $t \geq 0$

Dunque $u(t) = -2\cos(\pi t)$ $\begin{cases} M = -2 \\ \omega = \pi \\ \varphi = 0 \end{cases}$

$$|W(z)| = |W(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi} = |W(-1)| = \left|\frac{1}{-1-0.5}\right| = +\frac{2}{3}$$

$$\angle W(z) = \angle W(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \angle W(-1) = \angle\frac{1}{-1-0.5} = \angle 1 - \angle -1.5 = -\pi$$

$$\Rightarrow y_{ssu}(t) = M\,|W(z)|\cos(\omega t + \varphi + \angle W(z)) = -2\left(+\frac{2}{3}\right)\cos(\pi t - \pi)$$

$$= -\frac{4}{3}\cos(\pi t - \pi)$$

$$= -\frac{4}{3}\cos(\pi(t-1))$$

PROBLEMA 4 ⑥

Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{dove:} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [-1 \ 0 \ 1]$$

1) Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;

2) Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ della decomposizione di Kalman

3) Si individui la matrice di cambio di coordinate T^{-1} e le matrici $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, del sistema in forma canonica di Kalman (facoltativo?)

SOLUZIONE

Partiamo dal calcolo di $R = [B \ AB \ A^2B]$, matrice di raggiungibilità del sistema

$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ che ha rango 2 $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}(R)) = 2$

Una base per $\mathcal{R}$ è data da $\mathcal{R}: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e dunque

$\mathcal{R} = \mathrm{Im}(R) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Matrice di osservabilità del sistema: $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

che ha rango 2 $\Rightarrow$ $\dim(\mathcal{N}(Q)) = 1$

Gli elementi della base di $\mathcal{I}$ si ottengono risolvendo $Q \cdot x = 0$ $(\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q))$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

in definitiva $\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

I 4 sottospazi della decomposizione di Kalman sono:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \cap \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathcal{I}$$

(sottospazio degli stati raggiungibili e inosservabili)

$$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$ (è sufficiente aggiungere alla base di $\mathcal{X}_1$ un vettore della base di $\mathcal{R}$)

(sottospazio degli stati raggiungibili e osservabili)

$$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \{0\} \text{ essendo } \mathcal{X}_1 = \mathcal{I}$$

(sottospazio degli stati non raggiungibili e inosservabili)

$$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$ (infatti $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ non è generabile combinando i vettori delle basi di $\mathcal{X}_1\, \mathcal{X}_2\, \mathcal{X}_3$.)

(sottospazio degli stati non raggiungibili e osservabili)

La matrice di cambiamento di coordinate t.c. $z(t) = T x(t)$ è

$$T^{-1} = \left[\text{base}(\mathcal{X}_1) \,|\, \text{base}(\mathcal{X}_2) \,|\, \text{base}(\mathcal{X}_3) \,|\, \text{base}(\mathcal{X}_4) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si ha:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T\dot{x}(t) = T(Ax(t) + Bu(t)) = TAx(t) + TBu(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}} z(t) + \underbrace{TB}_{\tilde{B}} u(t) \\ y(t) = Cx(t) = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} z(t) \end{cases}$$

dunque $$\begin{cases} \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \tilde{B} = TB \\ \tilde{C} = CT^{-1} \end{cases}$$ ho già $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{\det(T^{-1})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

PROBLEMA 5

Sia dato il sistema $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - (x_2(t)-1)^2 \\ \dot{x}_2(t) = (\alpha-1)(x_2(t)-1) + 2x_1(t)(x_2(t)-1) \end{cases}$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0,1)$ al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (si utilizzi una funzione quadratica).

SOLUZIONE

Partiamo dal metodo indiretto (o della linearizzazione), calcolando.

$$J(x)\big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_e=(0,1)} = \begin{bmatrix} -3 & -2(x_2-1) \\ 2(x_2-1) & 2x_1+(\alpha-1) \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e=(0,1)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \alpha-1 \end{bmatrix}$$

Il criterio indiretto afferma che:

- se tutti gli autovalori di $J(x_e)$ hanno parte reale negativa $\Rightarrow$ x_e è loc. A.S.
- se esiste un autovalore di $J(x_e)$ a parte reale positiva $\Rightarrow$ x_e è INSTABILE
- se gli autovalori di $J(x_e)$ hanno parte reale negativa, ma almeno uno ha parte reale nulla $\Rightarrow$ CASO CRITICO nel quale non si può affermare nulla.

Nel caso in esame $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = \alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{se } \alpha < 1 \Rightarrow x_e \text{ loc. A.S.} \\ \text{se } \alpha > 1 \Rightarrow x_e \text{ INSTABILE}} \\ \text{se } \alpha = 1 \Rightarrow \text{caso critico} \end{cases}$

Discutiamo il caso critico con il metodo diretto con $V(x) = \frac{\beta}{2}x_1^2 + \frac{\gamma}{2}(x_2-1)^2$ $\quad \beta, \gamma > 0!$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - (x_2-1)^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1(x_2-1) \end{cases}$ $\quad \dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta x_1 & \gamma(x_2-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3x_1 - (x_2-1)^2 \\ 2x_1(x_2-1) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dot{V}(x) = -3\beta x_1^2 - \beta x_1(x_2-1)^2 + 2\gamma x_1(x_2-1)^2$

scegliendo $\beta = 2\gamma > 0$ si ottiene: $\begin{cases} V(x) = \gamma x_1^2 + \frac{\gamma}{2}(x_2-1)^2 > 0 \\ \dot{V}(x) = -3\beta x_1^2 \le 0 \end{cases}$ (si annulla in tutti punti $(x_1, x_2) = (0, \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow \begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_e \text{ per } \alpha = 1 \text{ è semplicemente stabile.}}$