TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 14-06-2016

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{14\,s}{(s-1)(s-6)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (6 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcolare la decomposizione spettrale della matrice A e discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ e discutere la perdita di informazione dovuta al passaggio dalla rappresentazione con lo spazio di stato alla rappresentazione ingresso-uscita.

Problema 3. (5 punti) Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t), x(t), y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= 0.5\,x(t) - u(t)\\ y(t) &= -2\,x(t)\end{aligned}$$

1. Discutere la stabilità del sistema e calcolare la risposta forzata al gradino unitario;
2. calcolare la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \frac{1}{4}\sin(2\pi t)$;

Problema 4. (5+2 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si completi la decomposizione strutturale individuando la matrice di cambio di base T^{-1} e le matrici $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ nella forma canonica di Kalman (*facoltativo*).

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \big(x_1(t) - 2\big)x_2(t) + k\big(x_1(t) - 2\big) \\ \dot{x}_2(t) = -3\,x_2(t) - \big(x_1(t) - 2\big)^2 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $x_e = (2, 0)$ sia un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
