TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 28-06-2016

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{9}{2}\,\frac{(s+10)}{s(s-3)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. si calcoli la matrice di transizione dello stato;
3. si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita.
4. si calcoli l'evoluzione libera dell'uscita con stato iniziale $x(0) = [\,1 \quad 0\,]^T$.

Problema 3. (5 punti) Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\frac{1}{3}\,\dot{x}(t) + (\alpha - 2)x(t) = \frac{4}{3}\,u(t)$$

$$2y(t) - \frac{3}{2}x(t) = (\alpha - 4)\,u(t)$$

dove $u(t), x(t), y(t)$ sono rispettivamente funzioni scalari di ingresso, stato e uscita, e α è un parametro reale.

1. Si riscriva il sistema nella forma standard $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ individuando A, B, C, D;
2. si discuta la stabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. fissato $\alpha = 4$ si calcolino la risposta al gradino unitario e la risposta armonica a $u(t) = \frac{10}{3}\sin(8t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si fornisca un esempio di stato non raggiungibile e inosservabile, e un esempio di stato non raggiungibile ma osservabile.

Problema 5. (5 punti) Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\,x_1(t) + 6\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4\,x_1(t) - 2\,x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2\,x_1^2 + 3\,x_2^2 + k\,x_1 x_2,\ k \in \mathbb{R}$.

In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori del parametro k che rendono $V(x)$ definita positiva.
2. Determinare un valore di k che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
