COMPITO D'ESAME di TEORIA DEI SISTEMI 28/06/2016

A cura di Vittorio De Iuliis

PROBLEMA 1

Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \cdot \frac{9}{2} \frac{(s+10)}{s(s-3)^2}.$$

1) Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$.
2) Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso.
3) Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

SOLUZIONE

Per $K=1$ $\quad W(s)\big|_{K=1} = \tilde{W}(s) = \frac{9}{2} \frac{(s+10)}{s(s-3)^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{10(1+s/10)}{s \cdot (-3)(1-\frac{s}{3})(-3)(1-\frac{s}{3})} =$

$$= \frac{\cancel{9}}{2} \cdot \frac{10}{\cancel{9}} \frac{(1+s/10)}{s(1-\frac{s}{3})^2} = 5 \frac{(1+s/10)}{s(1-s/3)^2}$$

Guadagno di Bode: $K_{\tilde{W}} = 5$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{MODULO } 20\log_{10}(5) \simeq 14\,dB = |K_{\tilde{W}}|_{dB} \\ \text{FASE NULLA } (\angle 5 = 0) \end{array}\right.$

Termine binomio al numeratore: $1+\frac{s}{10} = 1+\frac{s}{\omega_1}$ con $\omega_1 = 10\,rad/s$

Termine monomio al denominatore $\quad s = j\omega$

Termine binomio doppio al denominatore $\left(1-\frac{s}{3}\right)^2 = \left(1-\frac{s}{\omega_2}\right)^2$ con $\omega_2 = 3\,rad/s$

Il termine binomio al numeratore causa una pendenza del diagramma dei moduli di $+20\,dB/dec$ da $\omega_1 = 10\,rad/s$ in poi, e contribuisce al diagramma delle fasi con una pendenza di $+\pi/4\,rad/dec$ in $[0.1\omega_1, 10\omega_1] = [1, 100]\,rad/s$.

Il termine monomio al denominatore causa una pendenza di $-20\,dB/dec$ in tutto il diagramma dei moduli (ovvero $\forall \omega \in [0^+, \infty)$) e sposta globalmente di $-\frac{\pi}{2}$ il diagramma delle fasi.

Il termine binomio al denominatore (DOPPIO) dà una pendenza di $-40\,dB/dec$ da $\omega_2 = 3\,rad/s$ per i moduli e una pendenza di $-(-\frac{\pi}{2})\,rad/dec$ in $[0.1\omega_2, 10\omega_2] = [0.3, 30]\,rad/s$.

RIASSUMENDO:

Diagramma di modulo (taglia K_{dB} in $\omega = 1$ rad/s)

intervallo	pendenza
$\omega < 3$ rad/s	-20 dB/dec
$3 < \omega < 10$ rad/s	-60 dB/dec
$10 < \omega$	-40 dB/dec

Diagramma delle fasi (parte da $-\pi/2$)

intervallo	pendenza
$\omega < 0.3$ rad/s	0 dB/dec
$0.3 < \omega < 1$ rad/s	$+\pi/2$ rad/dec
$1 < \omega < 30$ rad/s	$+3/4\pi$ rad/s
$30 < \omega < 100$ rad/s.	$+\pi/4$ rad/s
$100 < \omega$	0 rad/s

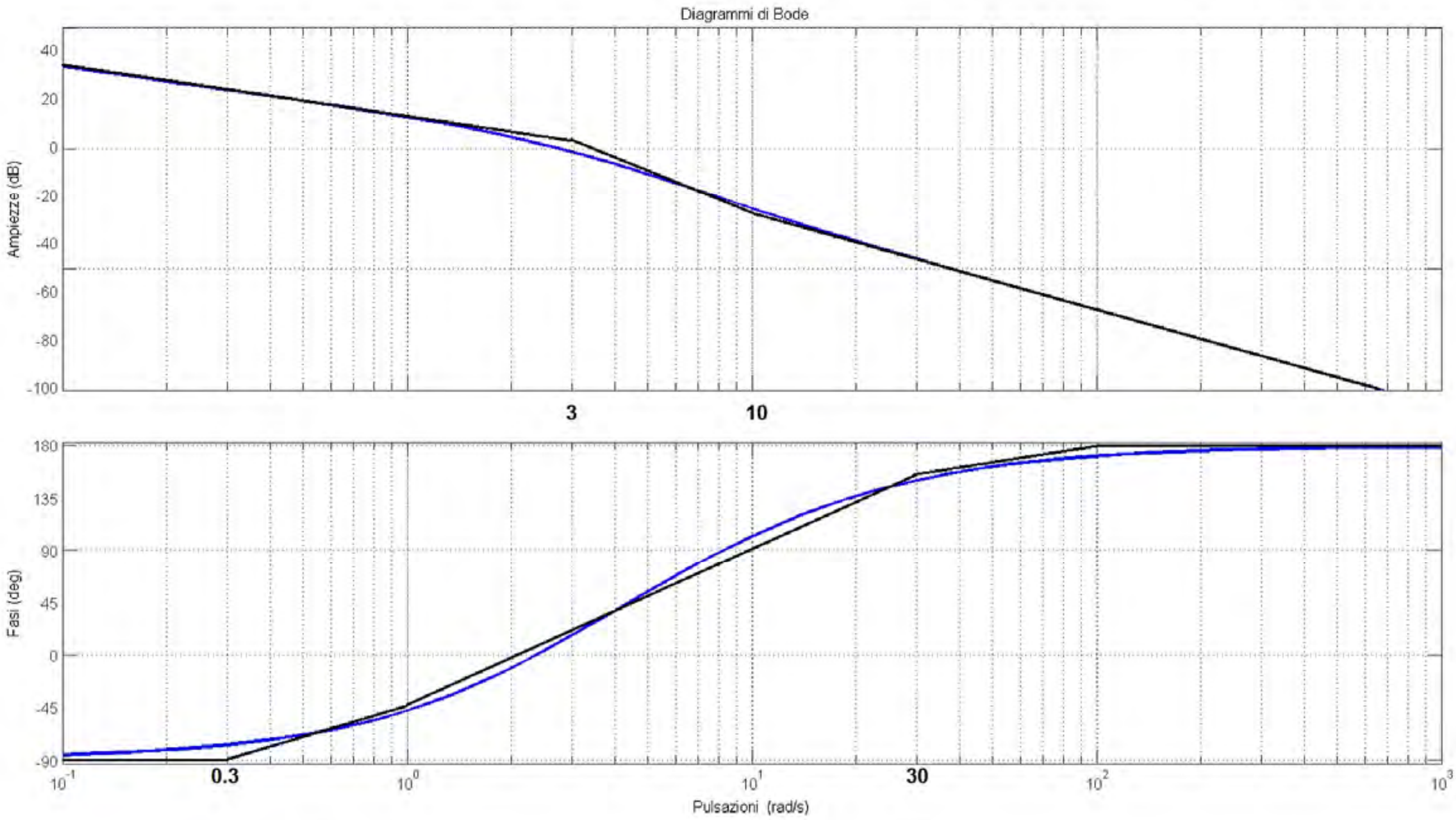
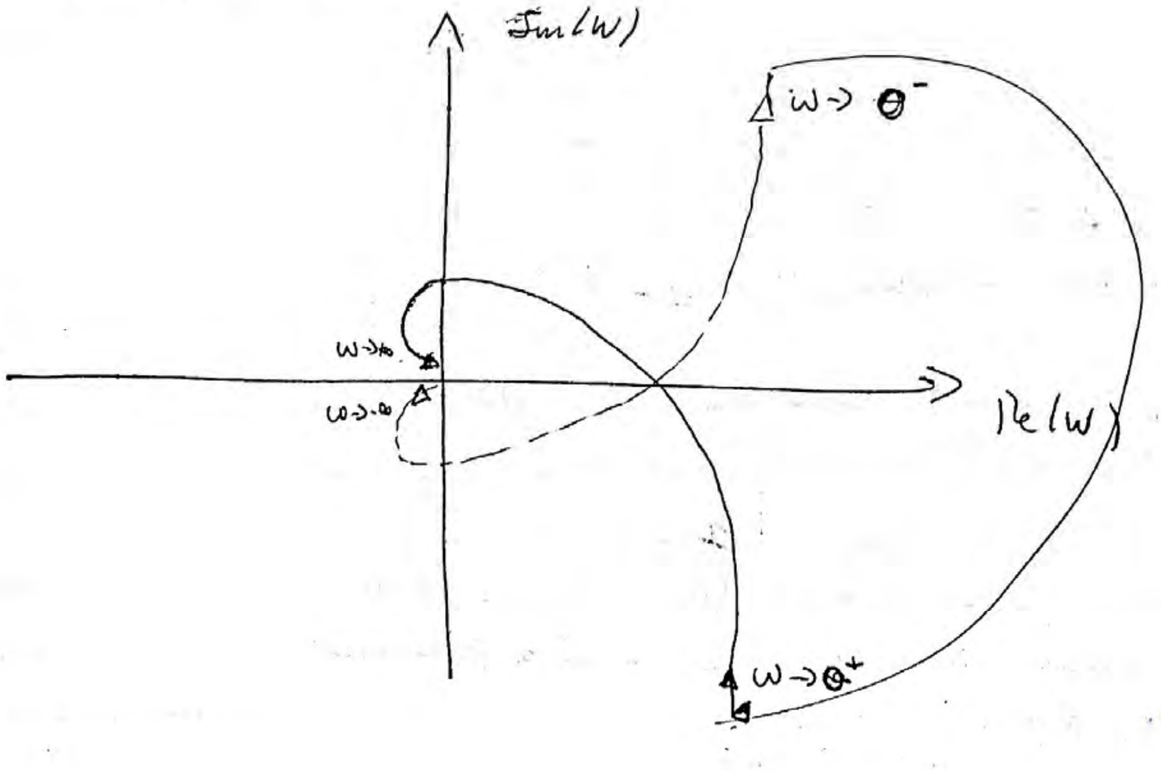


Diagramma di Nyquist per K=1:



Denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

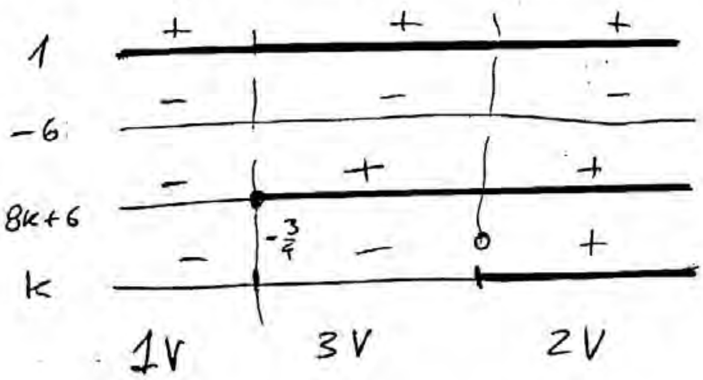
$$W_{CH}(s) = \frac{K\tilde{W}(s)}{1+K\tilde{W}(s)} = \frac{K\frac{9}{2}\frac{(s+10)}{s(s-3)^2}}{1+K\frac{9}{2}\frac{(s+10)}{s(s-3)^2}} = \frac{n_{CH}(s)}{d_{CH}(s)}$$

$$d_{CH}(s) = s(s-3)^2 + \frac{9}{2}K(s+10) = s^3-6s^2+9s+\frac{9}{2}Ks+45K = s^3-6s^2+\left(9+\frac{9}{2}K\right)s+45K$$

TABELLA DI ROUTH:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9+\frac{9}{2}K \\ 2 & -6 & 45K \\ 1 & \frac{45K+54+\frac{54}{2}K}{6} & \\ 0 & 45K & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9+\frac{9}{2}K \\ 2 & -6 & 45K \\ 1 & 5K+6+3K & \\ 0 & K & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9+\frac{9}{2}K \\ 2 & -6 & 45K \\ 1 & 8K+6 & \\ 0 & K & \end{array}$$

discussione del segno dei coefficienti della 1ª colonna:



$8K+6>0 \iff K>-\frac{3}{4}$

Per $K\in\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)$ $d_{CH}(s)$ ha 1 variazione di segno $\Rightarrow$ $W_{CH}(s)$ ha 1 polo a parte reale positiva $\Rightarrow$ INSTABILITÀ)

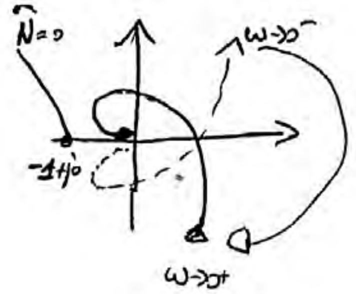
Per $K\in\left(-\frac{3}{4},0\right)$ $d_{CH}(s)$ ha 3 variazioni di segno $\Rightarrow$ $W_{CH}(s)$ ha 3 poli a parte reale positiva (INSTABILITÀ)

Per $K\in(0,+\infty)$ $d_{CH}(s)$ ha 2 variazioni di segno $\Rightarrow$ $W_{CH}(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva (INSTABILITÀ)

Dunque $\forall K\in(-\infty,+\infty)$ $W_{CH}(s)$ è INSTABILE (non è possibile stabilizzare il sistema con una controreazione siffatta).

Controlliamo che l'analisi sia confermata mediante il criterio di Nyquist.

per $K>0$



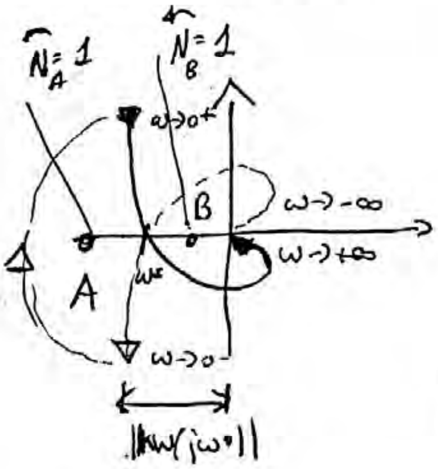
Al variare di $K>0$

$$\begin{cases} \hat{N}=0 \\ P_{AP}=2 \end{cases} \iff \boxed{P_{CH}=P_{AP}-\hat{N}=2}$$

$\forall K>0$

INSTABILITÀ di $W_{CH}(s)$

per $K<0$



due situazioni possibili al variare di $K<0$
il punto $-1+j0$ è in (A) oppure in (B)
Per discutere i due casi occorre calcolare ω^* (pulsazione di attraversamento) e in seguito $|W(j\omega^*)|$.

ω^* è t.c. $\mathrm{Im}\left(W(j\omega)\right)=0 \iff \mathrm{Im}\left\{\frac{j\omega+10}{j\omega(j\omega-3)^2}\right\}=0 \iff \mathrm{Im}\left\{\frac{j\omega+10}{j\omega(-\omega^2-6j\omega+9)}\right\}=0$

$\iff \mathrm{Im}\left\{\frac{10+j\omega}{6\omega^2+j(9\omega-\omega^3)}\right\}=0 \iff \mathrm{Im}\left\{\frac{(10+j\omega)\left(6\omega^2-j(9\omega-\omega^3)\right)}{\underbrace{\left(6\omega^2+j(9\omega-\omega^3)\right)\left(6\omega^2-j(9\omega-\omega^3)\right)}_{\text{reale}}}\right\}=0$

$\iff \mathrm{Im}\left\{60\omega^2-10j(9\omega-\omega^3)+6j\omega^3+9\omega^2-\omega^4\right\}=0 \iff -90\omega+10\omega^3+6\omega^3=0$

$$\iff \omega(16\omega^2-90)=0 \quad \begin{cases}\omega=0\\ \omega^*=\pm\sqrt{\frac{45}{8}}\end{cases}$$

Calcolo ora: $|W(j\omega^*)|=\left|W\left(j\sqrt{\frac{45}{8}}\right)\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{j\sqrt{\frac{45}{8}}+10}{j\sqrt{\frac{45}{8}}\left(j\sqrt{\frac{45}{8}}-3\right)^2}\right|=\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{100+\frac{45}{8}}}{\sqrt{\frac{45}{8}}\left(\frac{45}{8}+9\right)}=\frac{4}{3}$

Allora, nel caso $K<0$, per $|KW(j\omega^*)|>1$ $-1+j0$ è in B $\iff -K\frac{4}{3}>1 \iff K<-\frac{3}{4}$

e per $|KW(j\omega^*)|<1$ $-1+j0$ è in A $\iff -K\frac{4}{3}<1 \iff K>-\frac{3}{4}$

Ovvero se $K<-\frac{3}{4}$ $P_{CH}=P_{AP}-\hat{N}_B=2-1=1$ INSTABILITÀ

se $K>-\frac{3}{4}$ $P_{CH}=P_{AP}-\hat{N}_A=2-(-1)=3$ INSTABILITÀ

Esattamente come visto con il criterio di Routh.

Problema 2 Dato il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare:

1) Le proprietà dei modi naturali
2) La matrice di transizione dello stato
3) La funzione di trasferimento ingresso uscita
4) L'evoluzione libera dell'uscita per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

SOLUZIONE

Calcoliamo gli autovalori di A: $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = (\lambda-2)^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda - 2 = \pm j \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2+j \\ \lambda_2 = \lambda_1^* = 2-j \end{cases}$

Autovettori destri:

u_1 è t.c. $(\lambda_1 I - A)u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} j & 1 \\ -1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} j u_{1x} + u_{1y} = 0 \\ -u_{1x} + j u_{1y} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{1x} = j u_{1y} \\ u_{1x} = j u_{1y} \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} j u_{1y} \\ u_{1y} \end{pmatrix} \underset{u_{1y}=1}{=} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad u_2 = u_1^* = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$

Dunque $A = U \Lambda V$ con $U = [u_1 \; u_1^*] = \begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 2+j & 0 \\ 0 & 2-j \end{bmatrix}$, $V = U^{-1}$

$$V = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ j & j \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2j}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to v_1^T \\ \to v_2^T = (v_1^T)^* \end{matrix}$$

Proprietà dei modi naturali.

Il modo associato a $\lambda_1 = 2+j$ è t.c. $|\lambda_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} > 1$ INSTABILE

$C \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = j+1 \neq 0$ OSSERVABILE in uscita

$v_1^T \cdot B = \begin{bmatrix} -\frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$ ECCITABILE per ingressi impulsivi.

È facile verificare che il modo associato a $\lambda_2 = 2-j$ gode delle medesime proprietà!

La matrice di transizione dello stato è $\Phi(t) = A^t = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^t u_i v_i^T$

essendo $\lambda_2 = \lambda_1^*$ (e a ruota $u_2 = u_1^*$, $v_2^T = (v_1^T)^*$) segue che $A^t = 2\,\mathrm{Re}(\lambda_1^t u_1 v_1^T)$

FD $$A^t = 2\,\mathrm{Re}\left\{(2+j)^t \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{5}^t \cdot e^{j\angle 2+j\, t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{j}{2} \\ -\frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$\angle 2+j = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.46$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{5}^t (\cos(0.46t) + j\sin(0.46t)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{j}{2} \\ -\frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \sqrt{5}^t \begin{pmatrix} \cos(0.46t) & -\sin(0.46t) \\ \sin(0.46t) & \cos(0.46t) \end{pmatrix}$$

Per il calcolo di $W(z)$ conviene calcolare dapprima $w(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & t>0 \\ D & t=0 \end{cases}$

$$w(t) = CA^{t-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{5}^{t-1} \begin{pmatrix} \cos(0.46(t-1)) & -\sin(0.46(t-1)) \\ \sin(0.46(t-1)) & \cos(0.46(t-1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{5}^{t-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(0.46(t-1)) \\ \cos(0.46(t-1)) \end{bmatrix} = \sqrt{5}^{t-1} \left(\cos(0.46(t-1)) - \sin(0.46(t-1))\right) \quad \forall t>0$$

Ora si ha che $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\}$ e ricordando che:
$$\begin{cases} \mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \dfrac{\mathcal{Z}\{f(t)\}}{z} \\ \mathcal{Z}\{a^t\cos(\omega t)\} = \dfrac{z^2 - \cos(\omega) z a}{z^2 - 2\cos(\omega) z a + a^2} \\ \mathcal{Z}\{a^t\sin(\omega t)\} = \dfrac{\sin(\omega) z a}{z^2 - 2\cos(\omega) z a + a^2} \end{cases}$$

Segue: $$W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \frac{1}{z}\left[\left(\frac{z^2 - \cos(0.46) z\sqrt{5} - \sin(0.46) z\sqrt{5}}{z^2 - 2\cos(0.46) z\sqrt{5} + 5}\right)\right]$$

$$= \frac{z - (\cos(0.46) + \sin(0.46))\sqrt{5}}{z^2 - 2\cos(0.46) z\sqrt{5} + 5} \simeq \frac{z-3}{z^2 - 4z + 5}$$

L'evoluzione libera dell'uscita è data da $y_{ul}(t) = CA^t x(0)$

FD $$y_{ul}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{5}^t \begin{pmatrix} \cos(0.46t) & -\sin(0.46t) \\ \sin(0.46t) & \cos(0.46t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{5}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(0.46t) \\ \sin(0.46t) \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{5}^t \left(\cos(0.46t) + \sin(0.46t)\right).$$

PROBLEMA 3

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\dot{x}(t) + (\alpha-2)x(t) = \frac{4}{3}u(t) \\ 2y(t) - \frac{3}{2}x(t) = (\alpha-4)u(t) \end{cases}$$

dove le funzioni scalari $x(t), u(t), y(t)$ sono rispettivamente funzioni di stato, ingresso e uscita e α è un parametro reale.

1) Si riscriva il sistema nella forma standard $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ individuando A, B, C, D.

2) Si discuta la stabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Fissato $\alpha = 4$, si calcoli la risposta forzata del sistema all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ e la risposta armonica a $u(t) = \frac{10}{3}\sin(8t)$

SOLUZIONE Si ha: $\frac{1}{3}\dot{x}(t) = (2-\alpha)x(t) + \frac{4}{3}u(t) \Rightarrow$
$2y(t) = \frac{3}{2}x(t) + (\alpha-4)u(t) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{3(2-\alpha)}^{A}x(t) + \overbrace{4}^{B}u(t) \\ y(t) = \underbrace{\frac{3}{4}}_{C}x(t) + \underbrace{\frac{(\alpha-4)}{2}}_{D}u(t) \end{cases}$$

La stabilità del sistema dipende dal valore di A (sistema standard in variabile scalare), con $\alpha \in \mathbb{R}$:

$Re(A) > 0 \Leftrightarrow 2-\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 2$ (INSTABILITA')
$Re(A) = 0 \Leftrightarrow 2-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ (STABILITA' SEMPLICE)
$Re(A) < 0 \Leftrightarrow 2-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$ (STABILITA' ASINTOTICA)

Per $\alpha = 4$ il sistema diventa: $\begin{cases} \dot{x}(t) = -6x(t) + 4u(t) \\ y(t) = \frac{3}{4}x(t) \end{cases}$

Calcoliamo facilmente $W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{C\cdot B}{(s-A)} = \frac{3}{s+6}$

$u(t) = \delta_{-1}(t) \Leftrightarrow U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y_f(s) = W(s)U_f(s) = \frac{3}{s(s+6)}$

$Y_f(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+6}$ con $R_1 = \lim_{s\to 0} sY_f(s) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $R_2 = \lim_{s\to -6}(s+6)Y_f(s) = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \boxed{y_f(t) = \frac{1}{2}\delta_{-1}(t) - \frac{1}{2}e^{-6t}}$

Risposta armonica a $u(t) = \frac{10}{3}\sin(8t)$ $\begin{cases} M = 10/3 \\ \varphi = 0 \\ \omega = 8 \text{ rad/s} \end{cases}$ $\Rightarrow y_{arm}(t) = M|W(j\omega)|_{\omega=8}\sin(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$

$|W(j\omega)| = |W(j8)| = \frac{3}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{3}{10}$ $\angle W(j\omega)|_{\omega=8} = \angle\frac{3}{j8+6} = 0 - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \simeq -0.927$

$\Rightarrow \boxed{y_{arm}(t) = \sin(8t - 0.927)}$.

PROBLEMA 4

Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1) Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili.

2) Si individuino i 4 sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman

3) Si fornisca un esempio di stato non raggiungibile e non osservabile e un esempio di stato non raggiungibile e osservabile.

SOLUZIONE:

Matrici di raggiungibilità (R) e osservabilità (Q):

sottospazio degli stati ragg.

$$R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ che ha evidentemente rango 2 $\Rightarrow \dim(\mathcal{R}) = 2$

sottospazio degli stati inosservabili.

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$ che ha rango 2 (terza colonna proporzionale alla seconda) $\Rightarrow \dim(\mathcal{I}) = 1$

Spazi degli stati raggiungibili e inosservabili ($\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$)

$$\mathcal{R} = \mathrm{Im}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \{x \text{ t.c. } Qx = 0\} \quad Q \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}0\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4 sottospazi della decomposizione di Kalman:

$\mathcal{X}_1$ è t.c. $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ sottospazio degli stati ragg. e inoss.

$\mathcal{X}_2$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$ sottospazio degli stati ragg. e oss.

$\mathcal{X}_3$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$ sottospazio degli stati non ragg. e non osservabili

$\mathcal{X}_4$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3$ ed essendo $\mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \{0\}$ sottospazio degli stati non ragg. e osservabili

$x_{\bar{R}\bar{O}} = \begin{pmatrix}0\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$ è non ragg. non oss. (appartiene a $\mathcal{X}_3$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$)

Non esistono stati ~~non~~ raggiungibili e osservabili ($\mathcal{X}_4 = \{0\}$)

PROBLEMA 5 ⑤

Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + Kx_1x_2$.

In particolare: 1. Determinare l'intervallo dei valori $K \in \mathbb{R}$ t.c. $V(x) > 0$

2. Determinare un valore di K che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

SVOLGIMENTO

Le ipotesi del teorema di Lyapunov richiedono che $V(x)$ sia definita positiva in un intorno di $x_e = (0,0)$ e che essa si annulli in x_e.

Inoltre, $\dot{V}(x) \leq 0$ permette di dimostrare la stabilità semplice di x_e, mentre $\dot{V}(x) < 0$ permette di affermare che x_e è asintoticamente stabile.

Verifichiamo l'insieme di valori di $K \in \mathbb{R}$ che rende $V(x) > 0$.

$$V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + Kx_1x_2 = [x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} 2 & K/2 \\ K/2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{con } P = \begin{bmatrix} 2 & \frac{K}{2} \\ \frac{K}{2} & 3 \end{bmatrix} = P^T$$

Per il criterio di Sylvester, $V(x) >$ se e solo se $P > 0$, ovvero se $\begin{cases} 2 > 0 \\ 6 - \frac{K^2}{4} > 0 \end{cases}$

segue che $\frac{K^2}{4} < 6$ e si ottiene $K^2 < 24 \iff K \in (-\sqrt{24}, \sqrt{24})$.

Calcoliamo ora $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) = [4x_1 + Kx_2 \mid 6x_2 + Kx_1]\begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ -4x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} =$

$$= (4x_1 + Kx_2)(2x_1 + 6x_2) + (Kx_1 + 6x_2)(-4x_1 - 2x_2) =$$

$$= 8x_1^2 + 24x_1x_2 + 2Kx_1x_2 + 6Kx_2^2 - 4Kx_1^2 - 2Kx_1x_2 - 24x_1x_2 - 12x_2^2$$

$$= -(4K - 8)x_1^2 - (12 - 6K)x_2^2 + (\cancel{24} + \cancel{2K} - \cancel{2K} - \cancel{24})x_1x_2 = -(4K-8)x_1^2 - (12-6K)x_2^2$$

$\dot{V}(x) \leq 0$ se $\begin{cases} 4K - 8 \geq 0 \iff K \geq 2 \\ 12 - 6K \geq 0 \iff K \leq 2 \end{cases}$ ovvero solo se $K = 2 \in (-\sqrt{24}, \sqrt{24})$

(dunque $\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) \leq 0 \end{cases}$)

$K = 2 \implies \dot{V}(x) \leq 0 \implies x_e$ semplicemente stabile.