TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 14-07-2016

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{36\,(s-10)}{s^2+36}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. si calcolino la matrice di transizione dello stato e la risposta impulsiva;
3. si calcolino le risposte forzate al gradino unitario e all'ingresso $u(t) = e^{-2t}$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1} + \left(\frac{1}{8}\right)^{t-1}, \quad w(0) = 0.$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema e se ne discuta la stabilità;
2. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario;
3. si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si fornisca una sequenza di ingressi tali da portare lo stato del sistema da $x(0) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ a $\bar{x} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\gamma - 4)\,x_1(t) - \big(x_2(t) + 1\big) \\ \dot{x}_2(t) = 2\,x_1(t) + (\gamma - 4)\big(x_2(t) + 1\big)^3. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il punto $(0, -1)$ è un punto d'equilibrio per il sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
