TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 26-01-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{8\,(s+2)}{s\,(s^2+4s+16)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Svolgere la decomposizione spettrale di A e discutere la stabilità dei modi naturali del sistema;
2. si discutano le proprietà di osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. calcolare la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema;
4. calcolare l'evoluzione libera dell'uscita con stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema;
2. si calcoli la risposta al gradino unitario;
3. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sqrt{\frac{13}{2}}\cos(3\,t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determini uno stato iniziale $x(0)$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$ sia pari a $y_{lib}(0) = 0$, $y_{lib}(1) = 0$, $y_{lib}(2) = 8$, $y_{lib}(3) = -8$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4\,x_1(t) - 2\,x_1^3(t)\,x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (3-k)\,x_2(t)\,(1 + x_1(t)) - x_2^5(t). \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
