SCRITTO D'ESAME DI TEORIA DEI SISTEMI del 26/01/2016 ①

Soluzioni a cura di Vittorio De Iuliis - vittorio.deiuliis@graduate.univaq.it

PROBLEMA 1

$$W(s) = K\frac{8(s+2)}{s(s^2+4s+16)} = K\frac{\cancel{8}\,2\left(1+\frac{s}{2}\right)}{\cancel{16}\,s\left(1+\frac{4s}{16}+\frac{s^2}{16}\right)}$$

Dunque in forma di Bode otteniamo $W(s) = K\dfrac{\left(1+\frac{s}{2}\right)}{s\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{16}\right)}$

Ci interessa disegnare i diagrammi di Bode e Nyquist per $K=1$, ovvero i diagrammi di $\tilde{W}(s) = W(s)\big|_{K=1} = \dfrac{\left(1+s/2\right)}{s\left(1+s/4+s^2/16\right)}$

In $\tilde{W}(s)$ riconosciamo i termini:

- guadagno $K_{\tilde{w}} = 1$
  - MODULO $|K_{\tilde{w}}|_{dB} = 20\log_{10}|1| = 0$ dB
  - FASE $\angle K_{\tilde{w}} = 0$ (numero reale positivo)
- termine monomio al denominatore: MODULO -20 dB/dec in $[0,+\infty)$, SFASAMENTO globale di $-\pi/2$ rad
- termine binomio al numeratore:

  $\left(1+\frac{s}{2}\right) \to \omega_1 = 2$ rad/s
  - MODULI: $+20$ dB/dec in $[\omega_1,+\infty) = [2,+\infty)$
  - FASI: $+\pi/4$ rad/dec in $[0.1\omega_1, 10\omega_1] = [0,2;\ 20]$
- termine trinomio al denominatore:

  $\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{16}\right) = \left(1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\zeta = 1/2\\ \omega_n = 4 \text{ rad/s}\end{cases}$
  - MODULO: -40 dB/dec in $[\omega_n,+\infty) = [4,+\infty)$
  - FASI: rappresentazione su due decadi: $-\pi/2$ rad/dec in $[0{,}1\omega_n, 10\omega_n) = [0{,}4;\ 40]$

oppure rappresentazione mediante "α" (per le fasi)

occorre calcolare $\alpha = 5\zeta + \sqrt{25\zeta^2+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}+1} \simeq 5{,}2$

approssimazione con retta (segmento) di pendenza $-\dfrac{\pi}{2\log(\alpha)} = -2{,}20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ in $\left[\frac{\omega_n}{\alpha}, \alpha\omega_n\right] = [0{,}76;\ 20{,}8]$

Il diagramma dei moduli passa approssimativamente in $(1, K_{w\,dB}) = (1 \text{ rad/s}, 0 \text{ dB})$.

MODULI

intervallo	pendenza
$\omega < 2$ rad/s	-20 dB/dec
$2 < \omega < 4$ rad/s	0 dB/dec
$4 < \omega$	-40 dB/dec

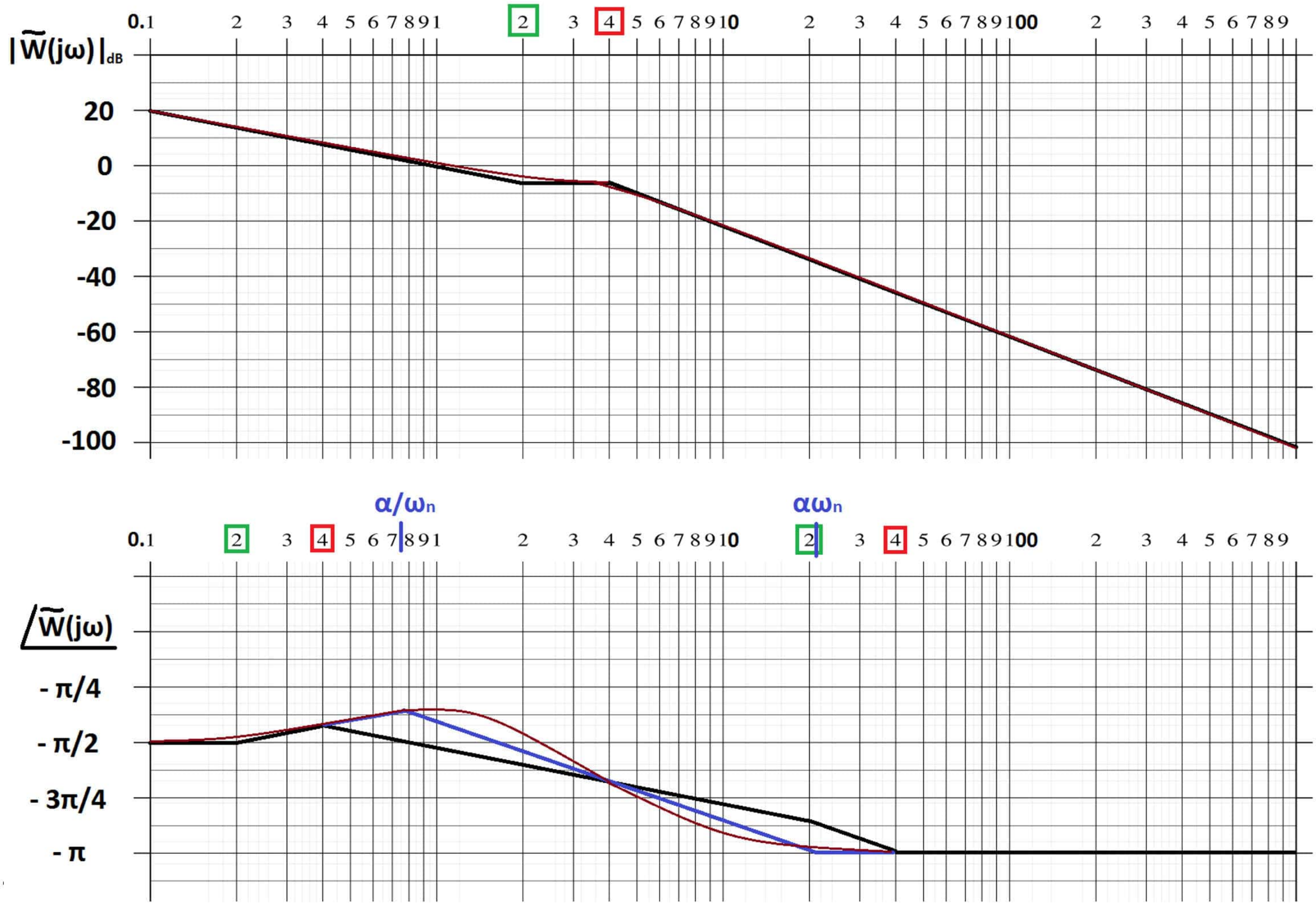
FASI (due decadi)

intervallo	pendenza
$\omega < 0{,}2$ rad/s	0 rad/dec
$0{,}2 < \omega < 0{,}4$ rad/s	$+\pi/4$ rad/dec
$0{,}4 < \omega < 20$ rad/s	$-\pi/4$ rad/dec
$20 < \omega < 40$ rad/s	$-\pi/2$ rad/dec
$40 < \omega$	0 rad/dec

FASI (α)

intervallo	pendenza
$\omega < 0{,}2$ rad/s	0 rad/dec
$0{,}2 < \omega < 0{,}76$	$+\pi/4$ rad/dec
$0{,}76 < \omega < 20$	-1.41 rad/dec
$20 < \omega < 20.8$	-2.20 rad/dec
$20.8 < \omega$	0 rad/dec

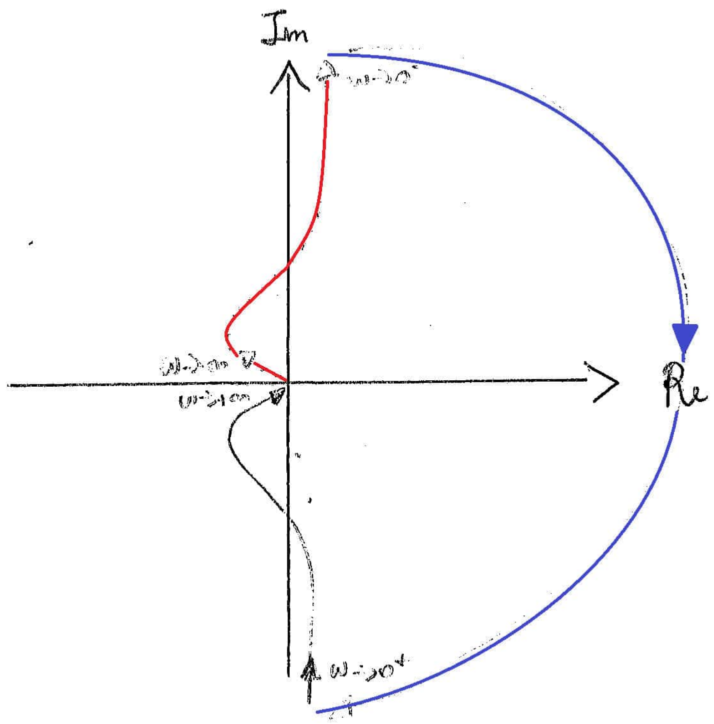
Diagrammi di Bode di $\widetilde{W}(j\omega)$



Diagrammi asintotici, Diagramma delle fasi con metodo 'α', Diagrammi reali.

Diagramma polare di $\widetilde{W}(j\omega)$

(valido per ogni k>0 a meno di un fattore di scala)



Calcolo della funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W_{CH}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{k\tilde{W}(s)}{1+k\tilde{W}(s)} = \frac{k\,\frac{(1+s/2)}{s(1+s/4+s^2/16)}}{1+k\,\frac{(1+s/2)}{s(1+s/4+s^2/16)}} = \frac{k\cdot 8(1+s/2)}{s(1+s/4+s^2/16)+k(1+s/2)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\to D_{CH}(s) = s\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{16}\right)+k\left(1+\frac{s}{2}\right) = \frac{s^3}{16}+\frac{s^2}{4}+s+\frac{s}{2}k+k$$

$$= s^3+4s^2+16s+8sk+16k = s^3+4s^2+8(2+k)s+16k$$

Discussione della stabilità del sistema in controreazione unitaria mediante i criteri di Routh e Nyquist.

Criterio di Routh applicato a $D_{CH}(s) = s^3+4s^2+8(2+k)s+16k$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8(2+k) \\ 2 & 4 & 16k \\ 1 & \frac{16k-32(2+k)}{-4} & \\ 0 & 16k & \end{array} = \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8(2+k) \\ 2 & 1 & 4k \\ 1 & 8(2+k)-4k & \\ 0 & k & \end{array}$$

coefficienti della 1° colonna:

$$1 \quad 1 \quad \underbrace{8(2+k)-4k}_{=\,16+4k} \quad k$$

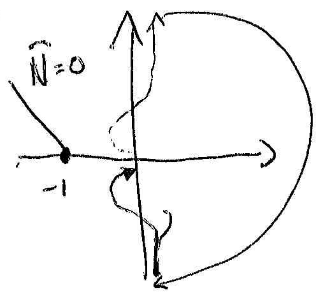
		-4		0	
1	+		+		+
1	+		+		+
4+K	−		+		+
K	−		−		+
	1V		1V		0V

per $K>0$ il sistema a ciclo chiuso non ha poli a parte reale positiva
→ È STABILE

per $K<0$ vi è sempre un polo a parte reale positiva → il sistema a ciclo chiuso è instabile $\forall K<0$

Il risultato è confermato dall'analisi con NYQUIST:
Innanzitutto si vede che $P_{AP}=0$, infatti vi è il polo nullo e inoltre il termine $s^2+4s+16$ ha due radici a parte reale negativa (tutti i coefficienti hanno lo stesso segno). Dunque

$K>0$

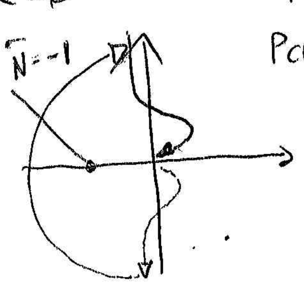


Per $K>0$

$P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 0$

stabilità a ciclo chiuso $\forall K>0$

$K<0$



Per $K<0$

$P_{CH} = P_{AP} - \hat{N} = 1$

instabilità a ciclo chiuso per ogni $K<0$.

PROBLEMA 2

Sistema a tempo discreto $\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D = 0$

Calcolo degli autovalori e autovettori di A:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left\| \begin{matrix} \lambda - 2 & 2 \\ -1 & \lambda - 4 \end{matrix} \right\| = (\lambda-2)(\lambda-4) + 2 = 0$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 + j \\ \lambda_2 = 3 - j = \lambda_1^* \end{cases}$$

Poiché $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} > 1$

entrambi i modi naturali del sistema sono INSTABILI.

Autovettori destri di A:

u_1 è t.c. $(\lambda_1 I - A)u_1 = 0 \iff \begin{cases} (1+j)x + 2y = 0 \\ -x + (-1+j)y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(1+j)x$

scelto $x = -2$ si ha $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}(1+j)x \end{pmatrix}\Bigg|_{x=-2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+j \end{pmatrix}$

Facilmente, segue che $u_2 = u_1^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-j \end{pmatrix}$

Dunque in $A = U \Lambda V$ con $U = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1+j & 1-j \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 3+j & 0 \\ 0 & 3-j \end{bmatrix}$

resta da calcolare $V = U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} 1-j & 2 \\ -1-j & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4j} \begin{bmatrix} 1-j & 2 \\ -1-j & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j & -\frac{1}{2}j \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}j & \frac{1}{2}j \end{bmatrix}$

e si può verificare semplicemente che per $v_1^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j & -\frac{1}{2}j \end{bmatrix}$, $v_2^T = (v_1^T)^*$

si ha $v_i^T u_j = \delta_{ij}$. Entrambi i modi sono osservabili ed eccitabili, infatti

$\boxed{\begin{matrix} C \cdot u_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 1-j \end{bmatrix} \neq 0 \\ C \cdot u_2 \neq 0 \\ v_1^T \cdot B = [-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j \ \ -\frac{1}{2}j] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \\ v_2^T \cdot B \neq 0 \end{matrix}}$

Il calcolo di $\Phi(t) = A^t$ si svolge sfruttando la decomposizione spettrale di A, e vale

$$A^t = U \Lambda^t V = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^t u_i v_i^T = 2\,\mathrm{Re}(\lambda_1^t u_1 v_1^T)$$

$= 2\,\mathrm{Re}\left\{ (3+j)^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j & -\frac{1}{2}j \end{bmatrix} \right\}$ con $(3+j)^t = \sqrt{10}^t e^{j \angle(3+j) t} = \sqrt{10}^t e^{j \operatorname{atan}(\frac{1}{3}) t} =$

$= \sqrt{10}^t e^{j 0{,}32 t} = \sqrt{10}^t (\cos(0{,}32t) + j\sin(0{,}32t))$

$\Rightarrow A^t = 2\,\mathrm{Re}\left\{ \sqrt{10}^t (\cos(0{,}32t) + j\sin(0{,}32t)) \begin{bmatrix} -2 \\ 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}j & -\frac{1}{2}j \end{bmatrix} \right\}$

$$A^t = \cancel{2}\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{10}^{\,t}\left[\cos(0{,}32t)+j\sin(0{,}32t)\right]\begin{bmatrix}-2\\1+j\end{bmatrix}\left[-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}j \;;\; -j\right]\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{10}^{\,t}\left[\cos(0{,}32t)+j\sin(0{,}32t)\right]\begin{bmatrix}1+j & 2j\\ -j & +1-j\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \sqrt{10}^{\,t}\begin{bmatrix}\cos(0{,}32t)-\sin(0{,}32t) & -2\sin(0{,}32t)\\ \sin(0{,}32t) & \cos(0{,}32t)+\sin(0{,}32t)\end{bmatrix}.$$

NOTA

$\sin(\mathrm{atan}(\tfrac{1}{3})) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos(\mathrm{atan}(\tfrac{1}{3})) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

NOTA: si può verificare semplicemente che $A^0 = I$.
Inoltre, non effettuando le semplificazioni $\mathrm{atan}(\tfrac{1}{3}) \cong 0{,}32$
si può verificare (con MATLAB) che $A^1 = \sqrt{10}\begin{bmatrix}\cos(\mathrm{atan}(\tfrac{1}{3}))-\sin(\mathrm{atan}(\tfrac{1}{3})) & -- \\ -- & --\end{bmatrix} = A$.

$$w(t) = CA^{t-1}B \quad \text{per } t \geq 1$$

$$= [0 \;\; 1]\begin{bmatrix}\cos(0{,}32(t-1))-\sin(0{,}32(t-1)) & -2\sin(0{,}32(t-1))\\ +\sin(0{,}32(t-1)) & \cos(0{,}32(t-1))+\sin(0{,}32(t-1))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\sqrt{10}^{\,t-1}$$

$$= \sin(0{,}32(t-1)).$$

$W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\}$ utilizzo qui la seguente proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \frac{\mathcal{Z}\{f(t)\}}{z} = \frac{F(z)}{z}$$

Dunque $\mathcal{Z}\{w(t)\} = \mathcal{Z}\{\sqrt{10}^{\,t-1}\sin(0{,}32(t-1))\} = \dfrac{\mathcal{Z}\{\sqrt{10}^{\,t}\sin(0{,}32t)\}}{z}$

Ricordando che $\mathcal{Z}\{a^t\sin(\omega t)\} = \dfrac{z\sin(\omega)a}{z^2-2az\cos(\omega)+a^2}$

otteniamo $W(z) = \dfrac{\sin(0{,}32)\cdot\sqrt{10}}{z^2-2z\cos(0{,}32)\sqrt{10}+10} \simeq \dfrac{1}{z^2-6z+10}$.

Evoluzione libera dell'uscita per $x(0) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$$y_{lib}(t) = CA^t x(0) = [0 \;\; 1]\left[A^t\right]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \sqrt{10}^{\,t}\left[\sin(0{,}32t) \;;\; \cos(0{,}32t)+\sin(0{,}32t)\right]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \cos(0{,}32t).$$

$(= \cos(\mathrm{atan}(\tfrac{1}{3})t))$

PROBLEMA 3 T.C. $w(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$, $u(t) = \sqrt{\frac{13}{2}}\cos(3t)$

Calcolo della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+4} = \frac{1}{2}\left[\frac{(s+4)+(s+2)}{(s+2)(s+4)}\right] = \boxed{\frac{s+3}{(s+2)(s+4)}}.$$

Risposta forzata al gradino unitario:

$Y_g(s) = W(s)\cdot U(s)$ con $u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_g(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+4)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+4}$$

$R_1 = \lim_{s\to 0} Y_g(s)\,s = \lim_{s\to 0} \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} = \frac{3}{8}$; $R_2 = \lim_{s\to -2} Y_g(s)(s+2) = \lim_{s\to -2} \frac{s+3}{s(s+4)} = \frac{1}{(-2)(2)} = -\frac{1}{4}$

$R_3 = \lim_{s\to -4} Y_g(s)(s+4) = \lim_{s\to -4} \frac{s+3}{s(s+2)} = \frac{-1}{(-4)(-2)} = -\frac{1}{8}$

Dunque $\boxed{y_g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_g(s)\} = \frac{3}{8}\delta_{-1}(t) - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-4t}}.$

La risposta armonica esiste in quanto i modi naturali del sistema (eccitabili ed osservabili) sono asintoticamente stabili.

$Y_{arm}(t) = M\,|W(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$ con $u(t) = \sqrt{\frac{13}{2}}\cos(3t)$ $\begin{cases} M = \sqrt{\frac{13}{2}} \\ \varphi = 0 \\ \omega = 3\ rad/s \end{cases}$

$$|W(j3)| = \frac{|j3+3|}{|j3+2|\,|j3+4|} = \frac{\sqrt{9+9}}{\sqrt{9+4}\sqrt{9+16}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{13}\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{13}}$$

$$\angle W(j3) = \angle\frac{j3+3}{(j3+2)(j3+4)} = \arctan\left(\frac{3}{3}\right) - \arctan\left(\frac{3}{2}\right) - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \simeq -0,84$$

$\Rightarrow \boxed{Y_{arm}(t) = \frac{3}{5}\cos(3t - 0,84)}.$

PROBLEMA 4

(4)

Sistema T.D. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $C = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$

- Base per $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$
- Quattro sottospazi della decomposizione di Kalman
- $x(0)$ t.c. $y_{lib}(0) = 0$, $y_{lib}(1) = 0$, $y_{lib}(2) = 8$, $y_{lib}(3) = -8$.

Iniziamo dal calcolo delle matrici di raggiungibilità e osservabilità:

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

rango$(R) = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(R)) = 1 \Rightarrow \mathcal{R} = \mathrm{Im}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ovvero $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base per $\mathcal{R}$.

rango$(Q) = 3 \Rightarrow \dim(\mathcal{N}(Q)) = 1$ e si vede semplicemente che $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{I} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

poiché l'unico modo per risolvere $Q \cdot x = 0$ è scegliere $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Riassumendo, $\mathcal{R} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\mathcal{I} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

4 sottospazi:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ spazio degli stati raggiungibili e non osservabili.

$\mathcal{X}_2$: $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow$ $\mathcal{X}_2 = \mathcal{R} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ spazio degli stati raggiungibili e osservabili.

$\mathcal{X}_3$: $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ spazio degli stati non raggiungibili e non osservabili

$\mathcal{X}_4$: $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ spazio degli stati non raggiungibili e non osservabili.

Per quanto concerne l'ultimo punto, occorre osservare che

$y_{lib}(t) = CA^t x(0)$ e dunque $\begin{bmatrix} y_{lib}(0) \\ y_{lib}(1) \\ y_{lib}(2) \\ y_{lib}(3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} x(0) = Q x(0)$.

Poiché vogliamo $\begin{bmatrix} y_{lib}(0) \\ y_{lib}(1) \\ y_{lib}(2) \\ y_{lib}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$ occorre risolvere $Q x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = -x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_1 + x_3 = 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow 5x_1 - x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = \gamma \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Segue che $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}$ con qualsiasi $\gamma \in \mathbb{R}$

produce l'evoluzione libera desiderata nei primi 4 istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$.

PROBLEMA 5

Studiare la stabilità dell'origine di $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_1^3 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = (3-k)x_2(1+x_1) - x_2^5 \end{cases}$

Iniziamo applicando il metodo indiretto, calcolando lo Jacobiano nel punto d'equilibrio $x_e = (0,0)$ [facile verificare che x_e è equilibrio sostituendo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ nelle equazioni di stato]

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e=(0,0)} = \begin{bmatrix} -4-6x_1^2x_2^2 & -4x_1^3x_2 \\ (3-k)x_2 & (3-k)(1+x_1)-5x_2^4 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e=(0,0)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3-k \end{bmatrix}$$

Dunque $J(x_e)$ ha i due autovalori $\begin{cases} \lambda_1 = -4 & \text{asintoticamente stabile} \\ \lambda_2 = 3-k \end{cases}$

Si distinguono 3 casi:

- se $3-k<0 \iff k>3$ allora λ_2 è asintoticamente stabile e dunque $J(x_e)$ ha solo autovalori a parte reale negativa $\Rightarrow$ x_e è localmente ASINT. STABILE
- se $3-k=0 \iff k=3$ allora $\lambda_2 = 0 \Rightarrow J(x_e)$ ha un autovalore a parte reale negativa e uno a parte reale nulla $\Rightarrow$ CASO CRITICO
- se $3-k>0 \iff k<3$ allora λ_2 è instabile $\Rightarrow J(x_e)$ ha un autovalore a parte reale positiva $\Rightarrow$ x_e è INSTABILE.

Discutiamo il caso critico $k=3$ con il metodo diretto:

$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$ e radialmente illimitata.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \;\vdots\; \frac{\partial V}{\partial x_2}\right]\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[x_1 \;\vdots\; x_2\right]\begin{bmatrix} -4x_1 - 2x_1^3x_2^2 \\ -x_2^5 \end{bmatrix}$$

$$= -4x_1^2 - 2x_1^4x_2^2 - x_2^6 < 0$$

$\Rightarrow$ per $k=3$ x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Riassumendo:

- per $k>3$ x_e è localmente asintoticamente stabile
- per $k=3$ x_e è globalmente asintoticamente stabile
- per $k<3$ x_e è instabile.