TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 13-06-2017

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{100\,(s+1)}{(s-10)(s^2+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ la cui matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$ è:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} & \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} \\ \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} & \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} \end{bmatrix}.$$

1. Si verifichi la proprietà di semigruppo della $\Phi(t)$;
2. si determini la matrice A del sistema e se ne calcoli la decomposizione spettrale;
3. sapendo che $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema e si discuta la perdita di informazione dovuta al passaggio dalla rappresentazione con lo spazio di stato alla rappresentazione ingresso-uscita.

Problema 3. (6 punti) Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t), x(t), y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 0.5\,x(t) + u(t) \\ y(t) &= 3\,x(t) \end{aligned}$$

si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. determinare una sequenza di ingressi che porti lo stato da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ a $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_1(t) - \left(x_1^2(t) + 2\,x_2^2(t)\right)x_2(t) \end{cases}$$

si studi la stabilità dell'origine al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
