Problema 1 : Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{100(s+1)}{(s-10)(s^2+100)}$$

- Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$.
- Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso
- Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

SOLUZIONE

$$W(s)\Big|_{K=1} = \tilde{W}(s) = \frac{100(s+1)}{(s-10)(s^2+100)} = \frac{\cancel{100}(s+1)}{(-10)(\cancel{100})\left(1-\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s^2}{100}\right)} = -\frac{1}{10}\frac{(1+s)}{\left(1-\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s^2}{100}\right)}$$

Si riconoscono i seguenti termini in $\tilde{W}(s)$:

- QUADAGNO : $-\frac{1}{10} = K_{\tilde{W}} \Rightarrow \quad K_{\tilde{W}dB} = 20\log_{10}\left|-\frac{1}{10}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{10} = -20\text{ dB}$

  inoltre, essendo $K_{\tilde{W}} < 0 \Rightarrow$ sfasamento di $\pm\pi$ nel diagramma delle fasi

TERMINE BINOMIO al numeratore : $(1+s) = \left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)$ con $\omega_1 = 1$ rad/s

TERMINE BINOMIO al denominatore : $\left(1-\frac{s}{10}\right) = \left(1-\frac{s}{\omega_2}\right)$ con $\omega_2 = 10$ rad/s

TERMINE TRINOMIO al denominatore $\left(1+\frac{s^2}{10}\right) = \left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$ con $\begin{cases}\xi = 0\\ \omega_n = 10 \text{ rad/s}\end{cases}$

Il diagramma dei moduli (asintotico) partirà da $K_{\tilde{W}dB}$. Il contributo del termine binomio al numeratore consiste in una pendenza di $+20$ dB/dec in $[1,+\infty)$, il termine binomio al denominatore contribuisce con -20 dB/dec in $[10,+\infty)$, il termine trinomio al denominatore aggiunge -40 dB/dec in $[10,+\infty)$, provocando inoltre un picco di amplificazione infinito in $\omega_n = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (poichè $\xi = 0$).

Nel diagramma delle fasi si può "misurare" l'errore del termine trinomio non smorzato, ricordando che il suo contributo consiste in uno spostamento istantaneo di $-\pi$ rad in corrispondenza di $\omega_n = 10$ rad/s. Occorre dunque ricordare che il diagramma parte da $-\pi$ rad, per effetto del guadagno negativo, e che i due termini binomi contribuiscono con pendenza $+\frac{\pi}{4}$ rad/dec in $[0.1, 10]$ (termine al numeratore) e $-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +\frac{\pi}{4}$ rad/dec in $[1, 100]$ (termine al denominatore ma negativo).

Riassumendo:

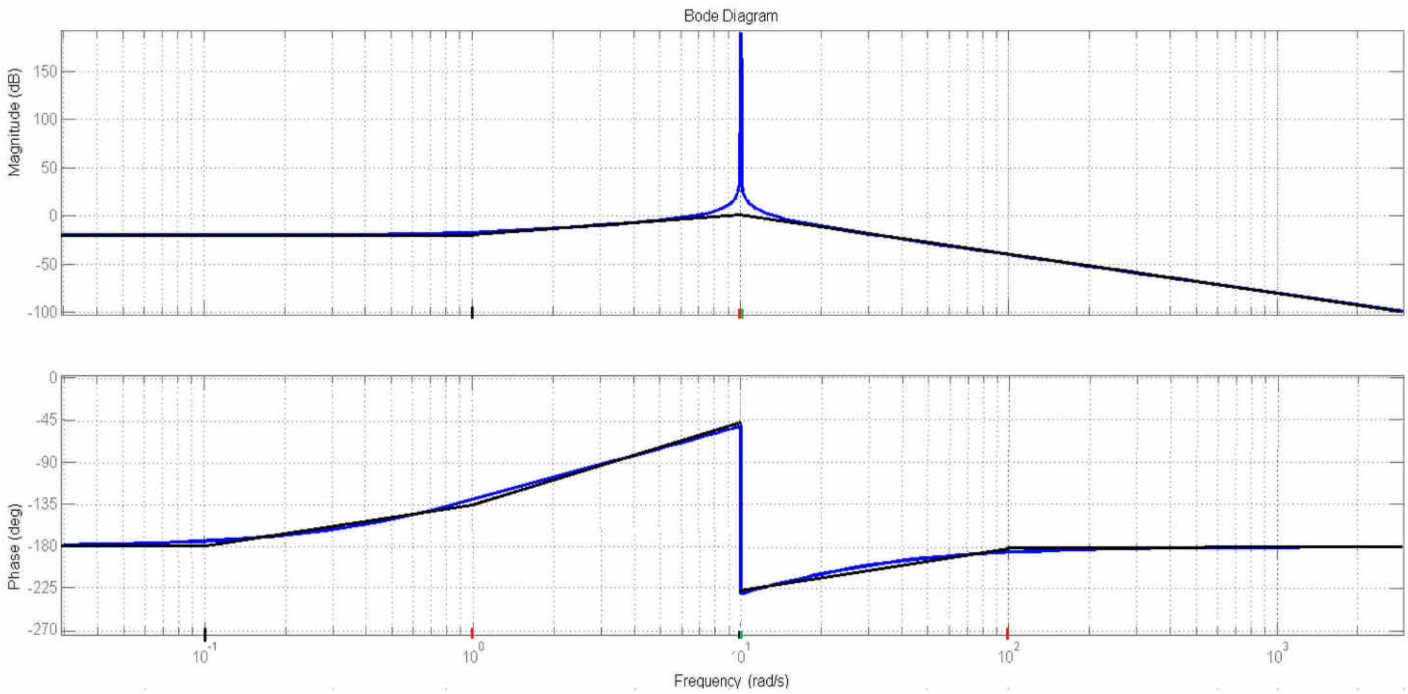
MODULI:

intervallo	pendenza
$\omega < 1$ rad/s	0 dB/dec
$1 < \omega < 10$ rad/s	+20 dB/dec
$10 < \omega$	−40 dB/dec

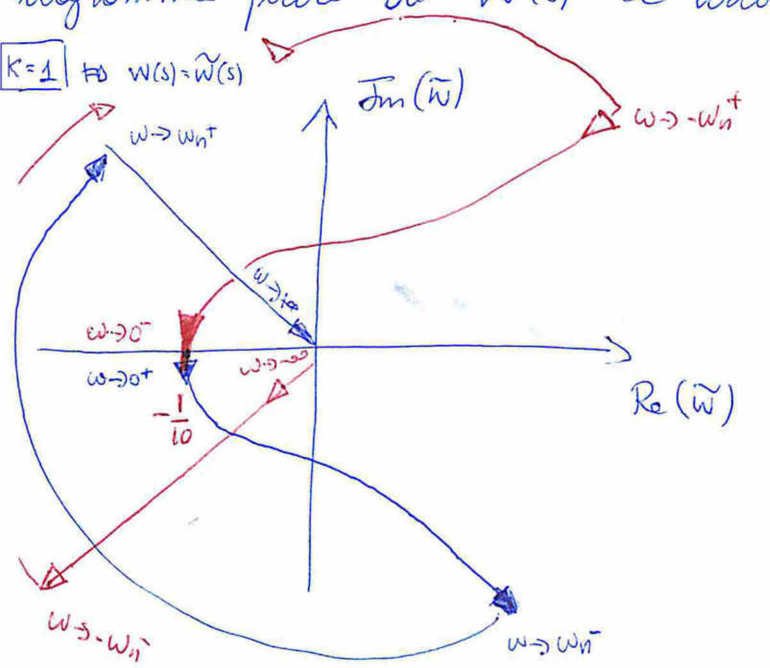
FASI:

intervallo	pendenza
$0.1 < \omega < 1$ rad/s	$+\pi/4$ rad/dec
$1 < \omega < 10$ rad/s	$+\pi/2$ rad/dec
$10 < \omega < 100$ rad/s	$+\pi/4$ rad/dec

(0 altrove)



Con l'ausilio dei diagrammi di Bode di $\tilde{W}(s)$ è possibile tracciare il diagramma polare di $W(s)$ al variare di K (2)



Si noti che la pulsazione di attraversamento per $\tilde{W}(s)\big|_{s=j\omega}$ è banalmente $\omega^* = 0$ (il diagramma non ha termini monomi). E in corrispondenza di $\omega^* = 0$ si ha per definizione $\tilde{W}(j\omega^*) = K_{\tilde{W}} = -\frac{1}{10}$.

Dunque al variare di K per $W(j\omega^*) = K\tilde{W}_*$ si ha facilmente che l'attraversamento corrisponde ad ampiezza pari a $|W(j\omega^*)| = -K \cdot \frac{1}{10}$

Denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso: $W_{CH}(s) = \dfrac{W_{AP}(s)}{1 + W_{AP}(s)} = \dfrac{K\tilde{W}}{1+K\tilde{W}}$

$$\Rightarrow W_{CH}(s) = \frac{n_{CH}(s)}{d_{CH}(s)} = \frac{K\frac{\tilde{n}(s)}{\tilde{d}(s)}}{1 + K\frac{\tilde{n}(s)}{\tilde{d}(s)}} = \frac{K\tilde{n}(s)}{\tilde{d}(s) + K\tilde{n}(s)}$$

$$\Rightarrow d_{CH}(s) = \tilde{d}(s) + K\tilde{n}(s) = (s-10)(s^2+100) + K100(s+1) = s^3 - 10s^2 + 100s - 1000 + 100Ks + 100K$$

$$= s^3 - 10s^2 + 100(1+K)s + 100(K-10)$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100(1+K) \\ 2 & -1\cancel{0} & +10\cancel{0}(K-10) \\ 1 & \frac{10(K-10) - 100(1+K)}{-1} & \\ 0 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100(1+K) \\ 2 & -1 & 10(K-10) \\ 1 & 110K & \\ 0 & 10(K-10) & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100(1+K) \\ 2 & -1 & 10(K-10) \\ 1 & K & \\ 0 & K-10 & \end{array}$$

studio del segno:

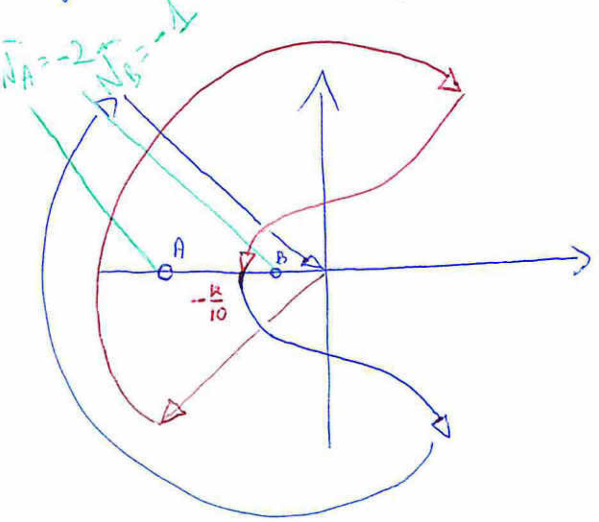
1	+	+	+
-1	−	−	−
K	−	0 +	+
K-10	−	−	10 +
	1V	3V	2V

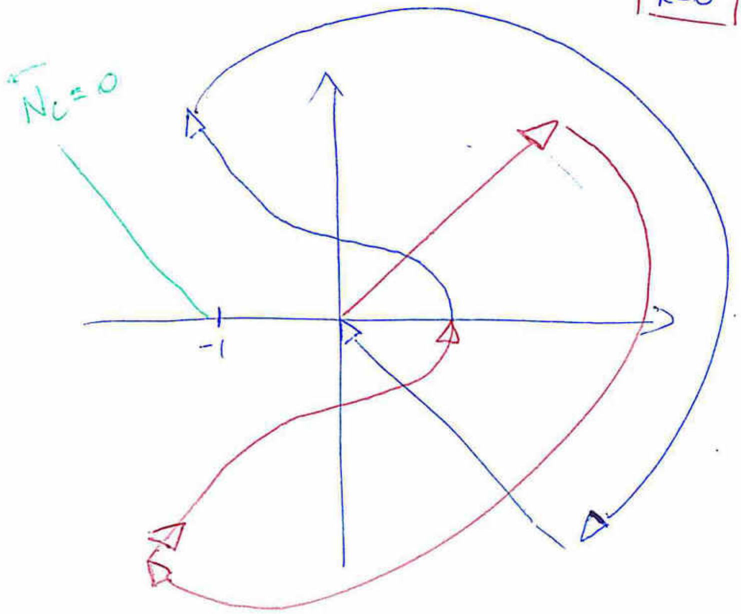
$\forall K \in (-\infty, +\infty)$ il sistema a ciclo chiuso è INSTABILE.

In particolare, se
- $K \in (-\infty, 0) \Rightarrow P_{CH} = 1$
- $K \in (0, 10) \Rightarrow P_{CH} = 3$
- $K \in (10, +\infty) \Rightarrow P_{CH} = 2$.

Verifichiamo i risultati ottenuti con il criterio di Nyquist.

Diagramma di $W(s)$ per $\boxed{K>0}$ $\boxed{K<0}$





Poiché $P_{AP} = 1$ (polo in $p_1 = 10$) al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ si ha:

Per $K>0$ se $-\frac{K}{10} > -1 \iff K < 10$ allora il punto critico è in (A) $\Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_A = 1+2=3$

se $-\frac{K}{10} < -1 \iff K > 10$ allora il p.to critico è in (B) $\Rightarrow P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_B = 1+1 = 2$

Per $K<0$ $P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_C = 1$.

I risultati sono concordi con l'analisi condotta con Routh.

PROBLEMA 2 (3)

Sia dato un sistema a tempo continuo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ la cui matrice di transizione dello stato $\phi(t) = e^{At}$ è:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{t}}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} & \frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} \\ \frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} & \frac{e^{t}}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} \end{bmatrix}$$

si verifichi la proprietà di semigruppo della $\phi(t)$, si calcoli la matrice A del sistema e se ne calcoli la decomposizione spettrale.

Inoltre, sapendo che $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = [1 \quad 1]$, $D=0$, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema; si verifichi la proprietà di eccitabilità o osservabilità nel passaggio spazio di stato -> rappr. ingresso-uscita.

SOLUZIONE

Proprietà di semigruppo di $\phi(t)$: $\phi(0) = I$. Verifichiamola: $\phi(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

È possibile calcolare A ricordando che $\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$.

Dunque $\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\Big|_{t=0} = Ae^{At}\Big|_{t=0} = A$.

Si ottiene: $\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{t}/2 + e^{-5t}/2 & e^{t}/2 - e^{-5t}/2 \\ e^{t}/2 - e^{-5t}/2 & e^{t}/2 + e^{-5t}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{t} - \frac{5}{2}e^{-5t} & \frac{1}{2}e^{t} + \frac{5}{2}e^{-5t} \\ \frac{1}{2}e^{t} + \frac{5}{2}e^{-5t} & \frac{1}{2}e^{t} - \frac{5}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}$

Dunque, $A = \left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

decomposizione spettrale: calcoliamo U, $V = U^{-1}$, Λ tali che $A = U \Lambda V$

Autovalori di A: $p(\lambda) = 0 \iff \det(\lambda I - A) = p(\lambda) = 0$ $\quad \left\| \begin{matrix} \lambda+2 & -3 \\ -3 & \lambda+2 \end{matrix} \right\| = 0$

$\iff (\lambda+2)^2 - 9 = 0 \iff \lambda + 2 = \pm\sqrt{9} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Autovalore $\lambda_1 = -5$ è associato a un modo naturale asintoticamente stabile, $(Re(\lambda_1) < 0)$

l'autovalore $\lambda_2 = 1$ è associato a un modo naturale instabile $(Re(\lambda_2) > 0)$.

$U = [u_1 \vdots u_2]$ è t.c. $\begin{cases} (\lambda_1 I - A)u_1 = 0 \\ (\lambda_2 I - A)u_2 = 0 \end{cases}$ $\quad u_1: \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = -y \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$

scelgo ad esempio $y = 1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$u_2: \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ e per $y = 1$ ottengo $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ora calcolo $V = U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}' = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

È facile verificare che $U \cdot \Lambda \cdot V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A$.

Funzione di trasferimento. Passiamo per il calcolo della risposta impulsiva $w(t) = Ce^{At}B + D$

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} & \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} \\ \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} & \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-5t}}{2} \\ \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-5t}}{2} \end{bmatrix} = e^t.$$

$\Rightarrow W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{s-1}$.

Si nota la perdita di osservabilità nel passaggio spazio di stato $\to$ I-O.

In effetti, solo l'autovalore $\lambda_2 = 1$ (INSTABILE) è associato a un modo osservabile:

$C \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ modo associato a $\lambda_1 = -5$ non osservabile

$C \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ modo associato a $\lambda_2 = 1$ osservabile.

È facile verificare che $V_1^T B \neq 0$, $V_2^T \cdot B \neq 0 \Rightarrow$ entrambi i modi sono eccitabili.

PROBLEMA 3

Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t), x(t), y(t)$ sono scalari.

$$\begin{cases} x(t+1) = 0.5\,x(t) + u(t) \\ y(t) = 3\,x(t) \end{cases}$$

Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

SOLUZIONE

Partiamo dal calcolo di $w(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & t > 0 \\ D & t = 0 \end{cases}$, da cui $w(t) = 3\,(0.5)^{t-1}$ $t > 0$

$w(0) = 0$.

Segue facilmente che $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \frac{3 \cdot \mathcal{Z}\{(0.5)^t\}}{z} = \frac{3}{z} \cdot \frac{z}{z-0.5} = \frac{3}{z-0.5}$

Il calcolo della risposta forzata a $u(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ è più semplice nel dominio delle frequenze, dove $Y_{for}(z) = W(z) \cdot U(z)$.

Ricordando che $\mathcal{Z}\{\cos(\omega t)\} = \dfrac{z(z-\cos(\omega))}{z^2 - 2z\cos(\omega)+1}$

si ha che $\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{\cos(\frac{\pi}{2}t)\} = \dfrac{z(z-\cos(\frac{\pi}{2}))}{z^2-2z\cos(\frac{\pi}{2})+1} = \dfrac{z^2}{z^2+1}$

Dunque, $Y_{for}(z) = W(z)U(z) = \dfrac{3}{z-0.5}\cdot\dfrac{z^2}{z^2+1} = \dfrac{3z^2}{(z-0.5)(z^2+1)}$

Torniamo al dominio del tempo, calcolando l'antitrasformata $\mathcal{Z}$ di $\dfrac{Y_{for}(t)}{z}$

$$\frac{Y_{for}(z)}{z} = \frac{R_1}{z-0.5} + \frac{R_2}{z+j} + \frac{R_3}{z-j} \quad \text{con } R_3 = R_2^*$$

$$R_1 = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{Y_{for}(t)}{z}(z-0.5) = \lim_{z\to 1/2} \frac{3z}{z^2+1} = \frac{3/2}{1/4+1} = \frac{3/\cancel{2}}{5/\cancel{4}_2} = \frac{6}{5}$$

$$R_2 = \lim_{z\to -j} \frac{Y_{for}(t)}{z}(z+j) = \lim_{z\to -j} \frac{3z}{(z-0.5)(z-j)} = \frac{\cancel{-}3\cancel{j}}{(-j-0.5)(\cancel{-}2\cancel{j})} = \frac{3}{2(-j-0.5)} = \frac{3(-\frac{1}{2}+j)}{2(-\frac{1}{2}+j)(-\frac{1}{2}-j)} =$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}+3j}{2(\frac{1}{4}+1)} = \frac{-\frac{3}{2}+3j}{\frac{5}{2}} = +\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{2}+3j\right) = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}j \quad \Rightarrow \quad R_3 = R_2^* = -\frac{3}{5}-\frac{6}{5}j$$

Si può facile verificare che, essendo $D=0$, $R_1+R_2+R_3 = 0$.

Segue, $Y_{for}(z) = \dfrac{R_1 z}{z-0.5} + \dfrac{R_2 z}{z+j} + \dfrac{R_3 z}{z-j} = \dfrac{6}{5}\dfrac{z}{z-0.5} + \left(-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}j\right)\dfrac{z}{(z+j)} + \left(-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}j\right)\dfrac{z}{z-j}$

$$\Rightarrow y_{for}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{for}(z)\} = \frac{6}{5}(0.5)^t + \left(-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}j\right)(-j)^t + \left(-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}j\right)(j)^t$$

Ricordando che $j^t = |j|^t e^{j\angle j\, t} = 1^t e^{j\frac{\pi}{2}t}$, $(-j)^t = |-j|^t e^{j\angle -j\, t} = 1^t e^{-j\frac{\pi}{2}t}$

$$y_{for}(t) = \frac{6}{5}(0.5)^t - \frac{3}{5}\left[1^t e^{j\frac{\pi}{2}t} + 1^t e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right] - \frac{6}{5}j\left[1^t e^{j\frac{\pi}{2}t} - 1^t e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right]$$

$$= \frac{6}{5}(0.5)^t - 1^t\frac{6}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1^t\frac{12}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Noto, poiché $t = 0,1,2,\dots$ $\quad y_{for}(t) = \dfrac{6}{5}(0.5)^t - \dfrac{6}{5}\cos(\frac{\pi}{2}t) + \dfrac{12}{5}\sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Non resta che calcolare la risposta armonica al medesimo ingresso $u(t)$.
Si noti che la risposta armonica esiste in quanto il sistema è asintoticamente stabile (un unico modo naturale associato all'autovalore $\lambda = 1/2$ di modulo < 1).

Si ha $y_{arm}(t) = M \left| W(e^{j\omega}) \right|_{\omega=\pi/2} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi + \angle W(e^{j\omega})\right)\Big|_{\omega=\pi/2}$ $\begin{cases} M = 1 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

$W(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{z-1/2}\Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}=j} = \frac{3}{j-1/2}$

$\left|W(e^{j\frac{\pi}{2}})\right| = \frac{3}{\sqrt{5/4}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$\angle W(e^{j\frac{\pi}{2}}) = -\angle\left(-\frac{1}{2}+j\right) = -\operatorname{arctg}(-2) - \pi \simeq -2$

$\Rightarrow y_{arm}(t) = \frac{6}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 2\right)$.

PROBLEMA 4

Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1) Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli inosservabili
2) Si individuino i 4 sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman
3) Determinare una sequenza di ingressi che porti lo stato da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

SOLUZIONE

Iniziamo con il calcolo della matrice di raggiungibilità del sistema:

$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ che ha rango pieno $\operatorname{rank}(R) = 4$
$\Rightarrow \dim(\mathcal{R}) = 4$

sottospazio degli stati raggiungibili: $\mathcal{R} = \operatorname{Im}(R) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (R ha rango pieno, genera tutto $\mathbb{R}^4$)

Proseguiamo con il calcolo della matrice di osservabilità

$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ che ha rango 3 $\Rightarrow \dim(\mathcal{N}(Q)) = \overset{4}{n} - \overset{3}{\dim(\operatorname{Im}(Q))} = 1$

Il nullo di Q è banalmente il sottospazio dei vettori la cui prima componente sia non nulla (al contrario delle altre): $\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sottospazio degli stati INOSSERVABILI

Dunque possiamo ora calcolare i 4 sottospazi canonici:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ stati raggiungibili e inosservabili.

$\mathcal{X}_2$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ stati ragg. e oss.

$\mathcal{X}_3$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \{0\}$ stati non ragg. e non oss.

$\mathcal{X}_4$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \{0\}$ stati non ragg e oss.

Per rispondere al terzo quesito è sufficiente scrivere

$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$, che per $x(0) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ diviene $x(1) = Bu(0) = \begin{bmatrix}0\\-u(0)\\u(0)\\-u(0)\end{bmatrix}$

da cui
$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-u(0)\\u(0)\\-u(0)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-u(1)\\u(1)\\-u(1)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-u(0)\\u(0)-u(1)\\u(1)\\-u(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-3\\2\\-2\end{bmatrix} \iff \{u(0) = -1,\ u(1) = 2\}.$$

$\boxed{\text{PROBLEMA 5}}$

Sia dato il sistema
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2\\ \dot{x}_2 = kx_1 - (x_1^2 + 2x_2^2)x_2\end{cases}$$
si studi la stabilità dell'origine al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$.

SOLUZIONE

Proviamo con l'applicare il metodo indiretto (linearizzazione attorno a $x_e = (0,0)$):
$$J(x_e) = \begin{bmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2\\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2\end{bmatrix}\Bigg|_{x_e=(0,0)} = \begin{bmatrix}-3x_1^2 & -1\\ k - 2x_1x_2 & -x_1^2 - 6x_2^2\end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ k & 0\end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = \det(\lambda I - J(x_e)) = \lambda^2 + k = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{-k}$

da cui si conclude che se $k \geq 0$ $J(x_e)$ ha almeno un autovalore a parte reale nulla

$\Rightarrow$ CASO CRITICO (nessuna conclusione possibile sulla stabilità locale di x_e).

Se invece $k < 0$ allora uno dei due autovalori di $J(x_e)$ ha parte reale positiva $\Rightarrow$ x_e è INSTABILE $\forall k < 0$.

Cerchiamo di dimostrare il caso critico $k \geq 0$ con il metodo diretto e la candidata di Lyapunov $V(x) = \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 > 0$ per $\alpha > 0$, radialmente illimitata.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x}(t) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \;\vdots\; \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\underset{\alpha x_1}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial V}{\partial x_1}}} \;\vdots\; \underset{x_2}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial V}{\partial x_2}}} \right] \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2 \\ k x_1 - (x_1^2 + 2x_2^2) x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) = -\alpha x_1^4 - \alpha x_1 x_2 + k x_1 x_2 - (x_1^2 + 2x_2^2) x_2^2$$

$$= \underbrace{-\alpha x_1^4}_{\leq 0} \underbrace{- (\alpha - k) x_1 x_2}_{?} \underbrace{- (x_1^2 + 2x_2^2) x_2^2}_{\leq 0}$$

per ogni $k > 0$, scegliendo $\alpha = k > 0$ si ottiene $\dot{V}(x) = -\alpha x_1^4 - (x_1^2 + 2x_2^2) x_2^2 < 0$

$\Rightarrow$ per $\begin{cases} k > 0 & x_e \text{ è globalmente asintoticamente stabile} \\ k < 0 & x_e \text{ è instabile.} \end{cases}$

Nulla si può concludere nel caso $k = 0$ con la scelta della semplice $V(x)$ in esame.