TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 27-06-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{20\,(s-60)}{s\,(s+5)\,(s+10)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Svolgere la decomposizione spettrale di A e discutere la stabilità dei modi naturali del sistema;
2. si discutano le proprietà di osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. calcolare la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema;
4. calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dell'uscita è un gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = 5\,e^{-2t}$$

si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(3\,t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si caratterizzino le proprietà degli stati $x_a = [1\ 0\ 0\ 0]^T$ e $x_b = [0\ 0\ -1\ 0]^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\big(x_1(t) - 1\big)^3 - \dfrac{1}{3}\big(x_1(t) - 1\big)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \big(x_1(t) - 1\big)^2 - k\,x_2(t). \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (1, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
