TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 07-09-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{5\,(s-1)}{s\,(s^2+25)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 2 + j2,\ \lambda_2 = 2 - j2$.
Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1 associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} -\frac{j}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad l_1 = \begin{bmatrix} j & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$;
4. calcolare l'evoluzione libera dell'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = [\,0 \quad 1\,]^T$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = 2\,e^{-5t} + e^{-t}$$

si calcolino la risposta al gradino e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 3\cos(2\,t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si fornisca uno stato iniziale $x(0)$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ sia pari a $y_{lib}(0) = 1$, $y_{lib}(1) = -1$, $y_{lib}(2) = 0$, $y_{lib}(3) = 0$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_1(t) - 3\,x_2(t) + k^4 x_2^4(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3\,x_1(t). \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio e, solo se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.