TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame dell'11-01-2018

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{s+6}{s\,(s+1)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ -0.4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(z)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento ingresso–uscita:

$$W(s) = \frac{2}{s+4},$$

si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$, la risposta al gradino unitario e (se esiste) la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \frac{1}{2}\cos(4\,t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano un esempio di stato raggiungibile e inosservabile e un esempio di stato non raggiungibile e osservabile.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_1(t) + x_1(t)x_2^3(t) \\[2mm] \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2^2(t) - \dfrac{1}{2}x_2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0,0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.