

Problema 1

Immagino tracciando il diagramma di Bode di $W(s) = K \frac{s+6}{s(s+1)^2}$ per $K=1$

Definiamo $\tilde{W}(s) = W(s)|_{K=1} = \frac{s+6}{s(s+1)^2} = \frac{6(1+\frac{s}{6})}{s(1+s)^2}$

Per $\tilde{W}(s)$ osserviamo i seguenti termini:

- Guadagno alle basse frequenze $K_{\tilde{W}}=6 \neq 0$ $(K_{\tilde{W}})_{dB} = 20 \log_{10} |6| \approx 15.5 \text{ dB}$
 $\angle K_{\tilde{W}} = \angle 6 = 0 \text{ rad}$ (nesso sfasamento globale)

- Termine binomio al numeratore $(1+\frac{s}{6}) \neq 0$ $\omega_2 = 6 \text{ rad/s}$
 Contribuisce al diagramma del modulo con una pendenza di $+20 \frac{dB}{dec}$ in $[6, +\infty)$
 " al diagramma delle fasi con una pendenza di $+\frac{\pi}{4} \text{ rad/dec}$ in $[0.6, 60]$

- Termine monomio al denominatore s
 Contribuisce al diagramma del modulo con una pendenza di -20 dB/dec in $[0, +\infty)$
 " " delle fasi con uno SFASAMENTO globale di $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

- Termine binomio doppio al denominatore $(1+s)^2 \neq 0$ $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$
 Contribuisce al diagramma del modulo con una pendenza di $-40 \frac{dB}{dec}$ in $[1, +\infty)$
 " " " delle fasi con una pendenza di $-\frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$ in $[0, 10]$

Non essendo presente il taglio anticipato di $\omega=1 \text{ rad/s}$, il diagramma del modulo (asintotico) passa in $\omega=1 \text{ rad/s}$ a $(K)_{dB} = 15.5 \text{ dB}$

Risumando:

MODULO	
$\omega < 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	-20 dB/dec
$1 < \omega < 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	-60 dB/dec
$6 < \omega$	-40 dB/dec

FASI	
$\omega < 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	0 rad/dec
$0.1 < \omega < 0.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$-\frac{\pi}{2} \text{ rad/dec}$
$0.6 < \omega < 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$-\frac{\pi}{4} \text{ rad/dec}$
$10 < \omega < 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$+\frac{\pi}{4} \text{ rad/dec}$
$60 < \omega$	0 rad/dec

Diagramm di Bode asintotico

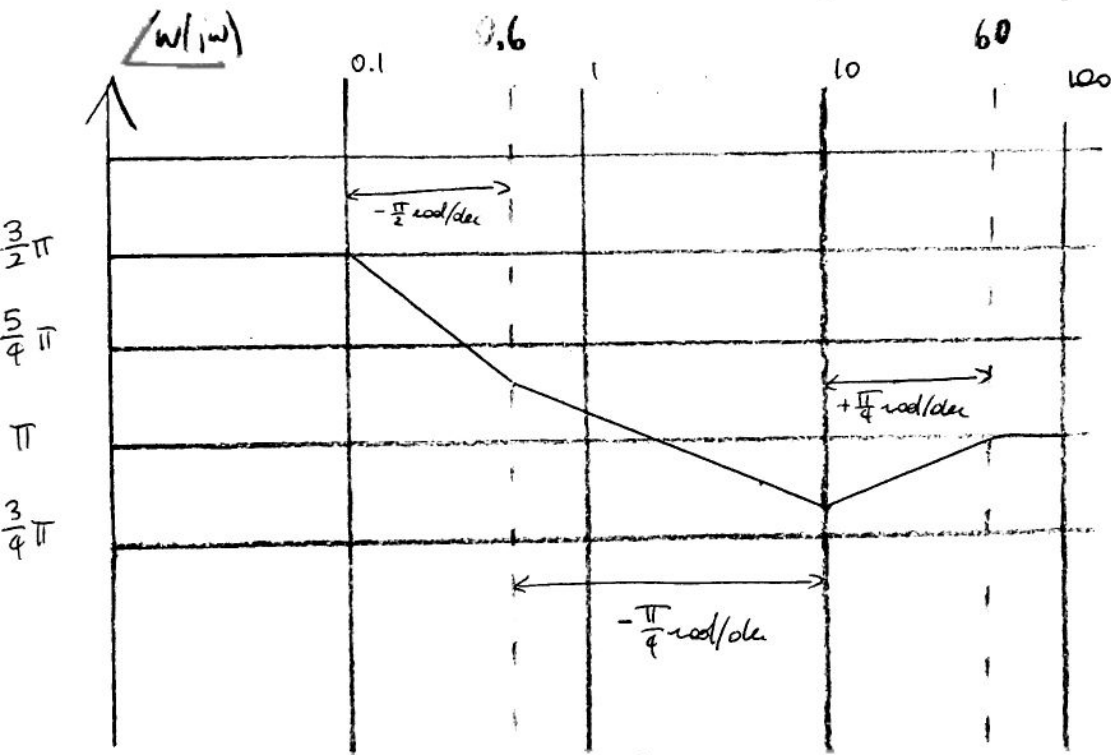
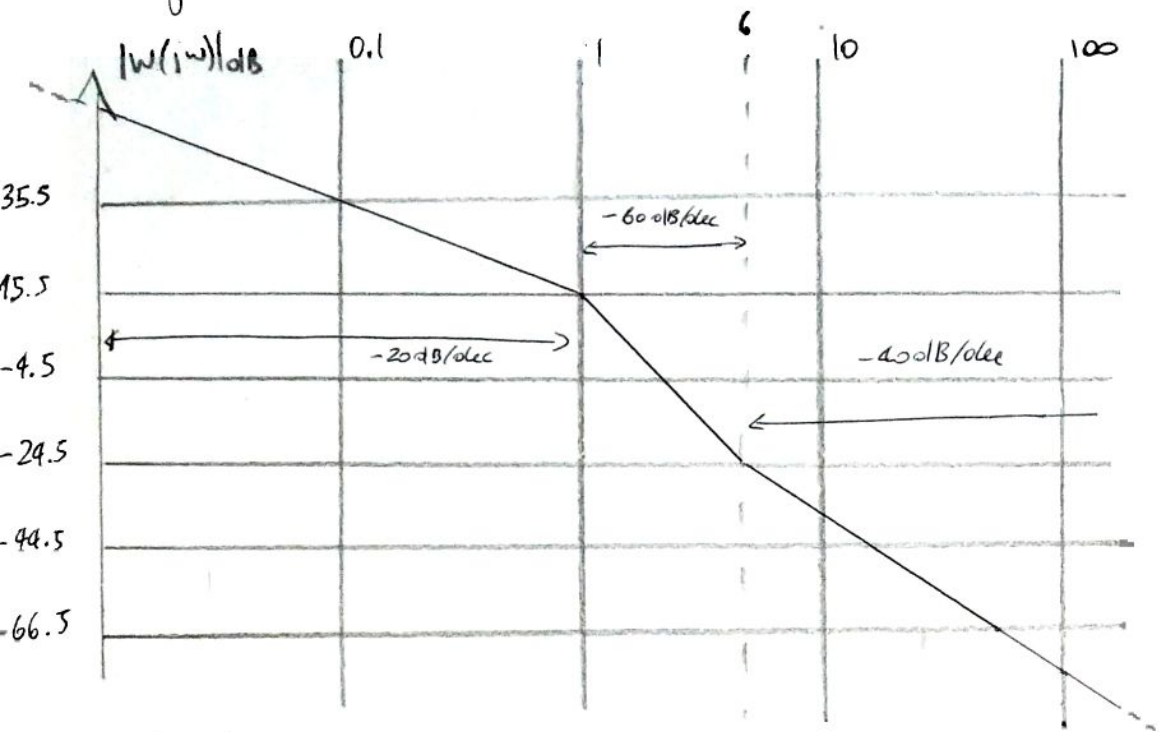
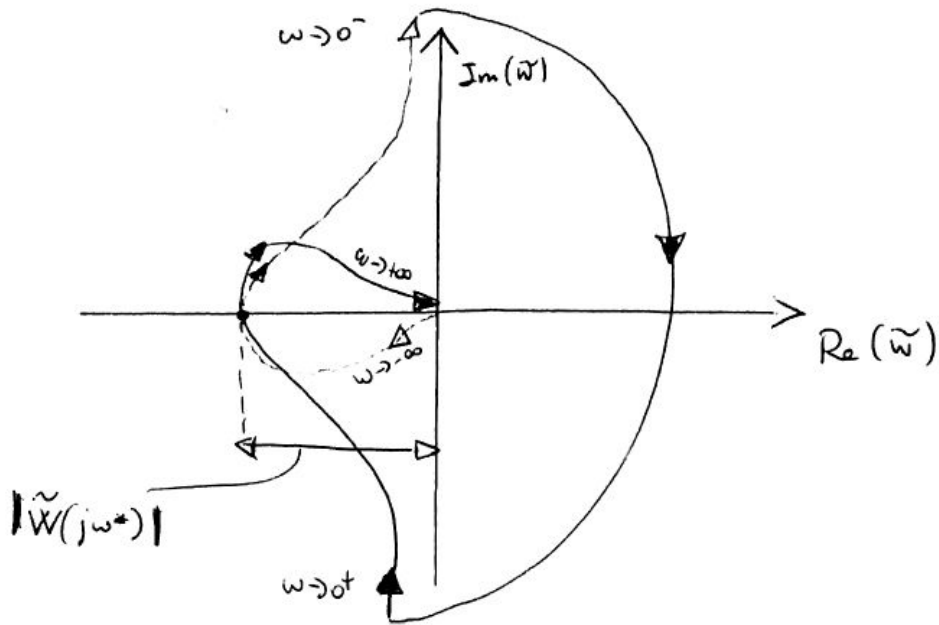


Diagramma polare (o di Nyquist) di $\tilde{W}(s) = W(s)|_{k=1}$



Calcolo della pulsazione di attraversamento w^* t.c. $\angle \tilde{W}(jw^*) = 0$

$$\text{Im}(\tilde{W}(jw)) = 0 \Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{jw+6}{jw(jw+1)^2} \right\} = 0 \Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{jw+6}{jw(-w^2+2jw+1)} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{jw+6}{-2w^2+j(w-w^3)} \right\} = 0 \Leftrightarrow \text{Im} \left\{ \frac{(jw+6)(-2w^2-j(w-w^3))}{(-2w^2+j(w-w^3))(-2w^2-j(w-w^3))} \right\} = 0$$

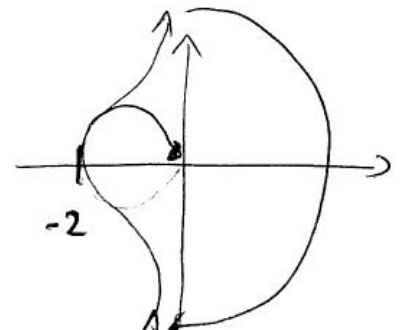
$$\Leftrightarrow \text{Im} \left\{ (jw+6)(-2w^2-j(w-w^3)) \right\} = 0 \Leftrightarrow -2w^3 + 6(w^3-w) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4w^3 - 6w = 0 \Leftrightarrow 2w(2w^2 - 3) = 0 \begin{cases} w=0 \\ w^* = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{scartiamo la} \\ \text{radice} \\ \text{reale} \end{array} \right)$$

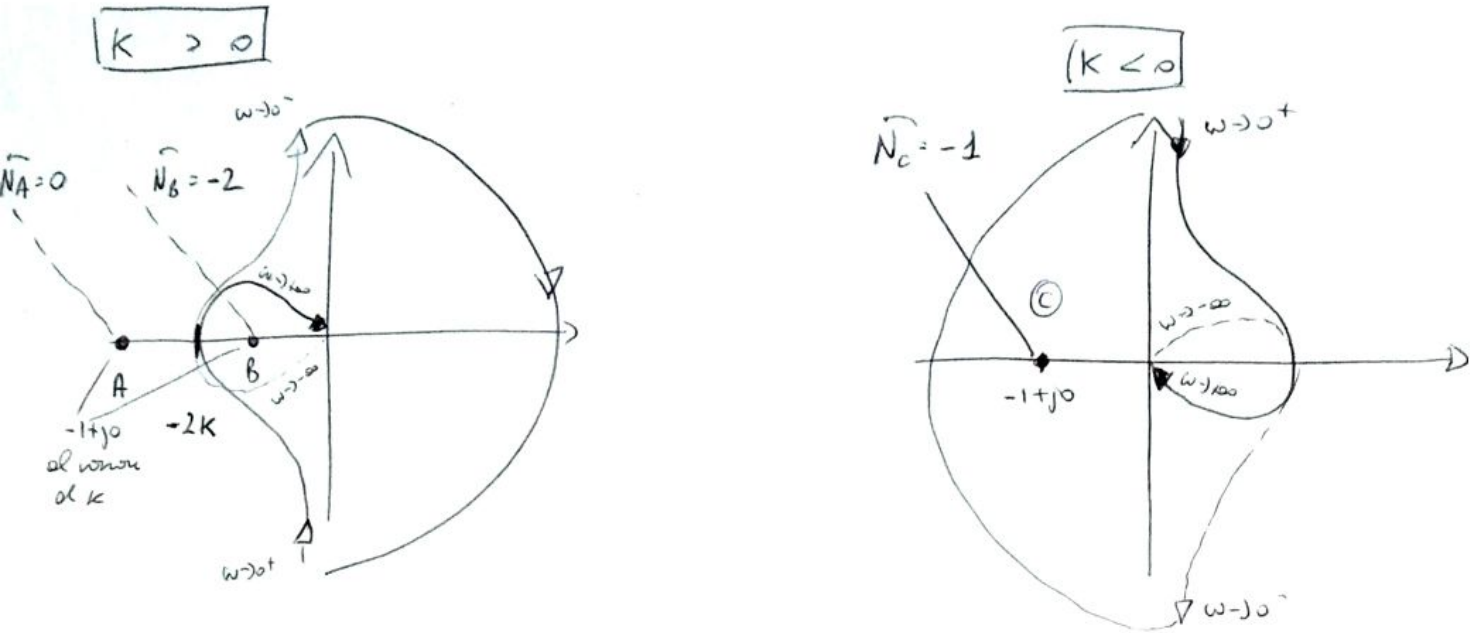
Modulo di $\tilde{W}(jw)$ alle pulsazioni di attraversamento:

$$|W(jw^*)| = \left| \frac{j\sqrt{\frac{3}{2}} + 6}{j\sqrt{\frac{3}{2}}(j\sqrt{\frac{3}{2}} + 1)^2} \right| = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} + 36}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} + 1\right)} = 2$$

Di conseguenza per $k=1$ il diagramma polare di $W(s) = k \frac{s+6}{s(1+s)^2}$ è:



Così semplice che per $K \in (-\infty, +\infty)$ si hanno i seguenti diagrammi: (2)



Caso $K > 0$: se $-2K > -1$ (ovvero se $K \in (0, \frac{1}{2})$)
 allora $-1+jo$ è in (A) (esterno al diagramma)
 e dunque $P_{CH} = P_{AP} - \hat{N}_A = 0 - 0 = 0$
 ed per il criterio di Nyquist il sistema controllato è STABILE

se $-2K < -1$ (ovvero se $K \in (\frac{1}{2}, +\infty)$)
 allora $-1+jo$ è in (B) (interno al diagramma)
 e dunque $P_{CH} = P_{AP} - \hat{N}_B = 0 - (-2) = 2$
 ed per il criterio di Nyquist la funzione di trasferimento a ciclo chiuso ha 2 poli a parte reale positiva ed il sistema controllato è INSTABILE

Caso $K < 0$: $\forall K < 0$ $-1+jo$ è in (C) ed $P_{CH} = P_{AP} - \hat{N}_C = 0 - (-1) = 1$
 e dunque la f.d.t. a ciclo chiuso ha 1 polo a parte reale positiva
 e il sistema controllato è instabile.

CRITERIO DI ROUTH: $D_{CH}(s) = \tilde{N}(s) + K\tilde{D}(s) = s(s+1)^2 + K(s+6) = s^3 + 2s^2 + (1+K)s + 6K$

regola della prima colonna:

4, 2	+		+		+
1-2K	+		+		$\frac{1}{2}$ -
6K	-		0		+

1V 0V 2V

l'ordine con Routh conferma i risultati ottenuti col criterio di Nyquist

$K < 0$ 1 polo a parte reale positiva in $W_{CH}(s)$

$K \in (0, \frac{1}{2})$ 0 poli a parte reale positiva in $W_{CH}(s)$

$K > \frac{1}{2}$ 2 poli a parte reale positiva in $W_{CH}(s)$

Problema 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ -0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad \text{Tempo discret}$$

Dimostrare dal calcolo degli autovalori di A:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} \lambda & -0.4 \\ 0.4 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = -(0.4)^2$$

Dunque $\lambda_{1,2} = \pm 0.4i$. Poiché $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0.4 < 1$, entrambi gli autovalori sono smorzati e mod naturale asintoticamente stabile.

Calcolo degli autovettori destri:

$$u_1: (\lambda_1 I - A)u_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & -0.4 \\ 0.4 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0.4ix = 0.4y \\ 0.4x = -0.4iy \end{cases} \quad \Leftrightarrow ix = y$$

$$\text{Dunque } u_1 = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} \text{ che per } x=1 \text{ si ha } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \neq 0 \quad u_2 = u_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$U = [u_1, u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \text{ è la matrice degli autovettori destri di } A$$

$$V = U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} -i & -i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} v_1^T \\ v_2^T \end{matrix}$$

$$\text{si verifica facilmente che } v_i^T \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Controllabilità / osservabilità del mod naturale:

$$v_1^T B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad ; \quad v_2^T B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$$

entrambi i mod sono controllabili su inputs in ingresso

$$C \cdot u_1 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = i \neq 0 \quad ; \quad C \cdot u_2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = -i \neq 0$$

entrambi i mod sono osservabili in uscita

$$\text{Calcolo di } \Phi(t) = A^t = U \Lambda^t V \quad \text{con } \Lambda^t = \begin{bmatrix} (0.4i)^t & 0 \\ 0 & (-0.4i)^t \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^2 \lambda_i^t u_i v_i^T = 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda_1^t u_1 v_1^T \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ (0.4i)^t \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{essendo } (0.4i)^t = (0.4)^t e^{j \frac{\pi}{2} t} = (0.4)^t e^{j \frac{\pi}{2} t} = (0.4)^t \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \text{ si ha:}$$

$$A^t = 2 \operatorname{Re} \left\{ (0.4)^t \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} = (0.4)^t \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

e verificare che
 $A^0 = I$
 $A^1 = A$ ✓

La risposta impulsiva è presto calcolata: $w(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ (3)

$$w(t) = CA^{t-1}B = [0 \ 1] \begin{bmatrix} (0.4)^{t-1} \cos(\frac{\pi}{2}(t-1)) & (0.4)^{t-1} \sin(\frac{\pi}{2}(t-1)) \\ -(0.4)^{t-1} \sin(\frac{\pi}{2}(t-1)) & (0.4)^{t-1} \cos(\frac{\pi}{2}(t-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(0.4)^{t-1} \sin(\frac{\pi}{2}(t-1)) & (0.4)^{t-1} \cos(\frac{\pi}{2}(t-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -(0.4)^{t-1} \sin(\frac{\pi}{2}(t-1))$$

La funzione di trasferimento è semplicemente $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\}$

Ricordando che, data $f(t)$, $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \frac{F(z)}{z}$ e $\mathcal{Z}\{d \sin(\omega t)\} = \frac{dz \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$

Si ha: $\mathcal{Z}\{-(0.4)^{t-1} \sin(\frac{\pi}{2}(t-1))\} = \mathcal{Z}\{-(0.4)^t \sin(\frac{\pi}{2}t)\} = \frac{-0.4 \sin(\frac{\pi}{2})}{z^2 - 2(0.4) \cos(\frac{\pi}{2}) + (0.4)^2} = \frac{-0.4}{z^2 + (0.4)^2}$

Da cui $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = -\frac{0.4}{z^2 + (0.4)^2}$

PROBLEMA 3 Partiamo da $W(s) = \frac{2}{s+4}$, funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo.

La risposta impulsiva è semplicemente $w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+4}\} = 2e^{-4t}$.

La risposta al gradino si calcola come segue: $u(t) = \int_0^t 1 \cdot \tau \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$

allora $Y_{grad}(s) = W(s)U(s) = \frac{2}{s(s+4)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+4}$ con $R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s+4} = \frac{1}{2}$
 $R_2 = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{2}{s} = -\frac{1}{2}$

FD $Y_{grad}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s}\} + \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+4}\} = \frac{1}{2} \delta_1(t) - \frac{1}{2} e^{-4t}$.

Risposta sinusale all'ingrosso $u(t) = \frac{1}{2} \cos(4t)$ $\begin{cases} M = 1/2 \\ \omega = 4 \text{ rad/s} \\ \varphi = 0 \end{cases}$ (esiste perché $W(s)$ ha solo poli a parti reali negative)

$y_{orm}(t) = M \cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)) \cdot |W(j\omega)|$ dove: $|W(j\omega)|_{\omega=4} = \left| \frac{2}{j4+4} \right| = \frac{2}{\sqrt{32}}$

$\angle W(j\omega)|_{\omega=4} = \angle \frac{2}{j4+4} = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

FD $y_{orm}(t) = \frac{1}{\sqrt{32}} \cos(4t - \frac{\pi}{4})$

PROBLEMA 4

Sistema a tempo discreto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Calcolo della matrice di raggiungibilità:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango 2 (due righe nulle!)}$$

$$\Rightarrow \dim(\mathcal{R}) = \dim(\text{Im}(R)) = 2 \quad \text{con} \quad \mathcal{R} = \text{Im}(R) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

spazio degli stati raggiungibili: $\mathcal{R} = \text{Im}(R)$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{base semplice scelta})$$

Calcolo della matrice di osservabilità:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango 3 (una fila semplice con la riduzione a gradini (metodo di Gauss-Jordan))}$$

spazio degli stati osservabili: $\mathcal{I} = \mathcal{W}(Q) = \{x : Qx = 0\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 - x_2 - x_4 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_4 \end{cases} \quad \Rightarrow \mathcal{W}(Q) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcolo dei 4 sottospazi della decomposizione di Kalman

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{0\} \quad \text{spazio degli stati raggiungibili e osservabili}$$

$$\mathcal{X}_2: \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \quad \text{spazio degli stati raggiungibili e non osservabili}$$

$$\mathcal{X}_3: \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \quad \text{spazio degli stati non raggiungibili e osservabili}$$

$$\mathcal{X}_4: \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \quad \text{spazio degli stati non raggiungibili e non osservabili}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{occorre scegliere 1 vettore linearmente indipendente dai tre vettori che costituiscono } \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \quad \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ad esempio, il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l.i.

Non esistono esempi di stati raggiungibili e osservabili (diversi dal vettore nullo)

Invece, qualsiasi vettore del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$, è un vettore ^{non} raggiungibile e osservabile (vettore di \mathcal{X}_4).

PROBLEMA 5

Sistema non lineare:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_1 + x_1x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \quad x_e = (0,0)$$

Che x_e sia d'equilibrio è presto verificato sostituendo $x_1=0$ e $x_2=0$ nelle equazioni del sistema: si ottiene $\dot{x}_1=0$ e $\dot{x}_2=0$.

Proviamo dello studio della stabilità locale con il metodo della linearizzazione:

$$J(x) \Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} k+x_2^3 & 3x_1x_2^2 \\ -2x_1x_2^2-\frac{1}{2}x_2 & -2x_1^2x_2-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Autovalori della Jacobiana: $\lambda_1 = k$
 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Quindi, se $k > 0$ allora $J(x)|_{x_e}$ ha un autovalore a parte reale positiva $\Rightarrow x_e$ INSTABILE
 $k = 0$ $J(x)|_{x_e}$ ha un autovalore a parte reale negativa e uno a parte reale nulla **CASO CRITICO!**
 $k < 0$ $J(x)|_{x_e}$ ha solo autovalori a parte reale negativa $\Rightarrow x_e$ è loc. ASINTOTICAMENTE STABILE

Discutiamo il caso critico $k=0$, sostituendo tale valore nelle equazioni del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Proviamo la condizione di Lyapunov quadratica

$$V(x) = \frac{\alpha}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0 \quad \text{per } \alpha > 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1x_2^3 \\ -x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix} = \alpha x_1^2x_2^3 - x_1^2x_2^3 - \frac{1}{2}x_2^2$$

per $\alpha = 1 (> 0)$ si ha $\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x_2^2 \leq 0$ (semidefinita negativa in grado 2 annullata in x_e , ma anche in ogni coppia $(\epsilon, 0) \in \mathbb{R}^2$)

$\neq 0$ per $k=0$ x_e è semplicemente stabile.

Riassumendo: $\begin{cases} k > 0 & x_e \text{ instabile} \\ k = 0 & x_e \text{ semplicemente stabile} \\ k < 0 & x_e \text{ loc. asintoticamente stabile} \end{cases}$