

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 15-02-2018

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{15(s-10)}{2(s^2+25)}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0].$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(z)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema scalare a tempo continuo descritto da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) + \frac{1}{3}u(t) \\ y(t) &= \frac{2}{3}x(t) \end{aligned}$$

si calcolino la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^t$ e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2 \cos(4t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si calcoli uno stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y_{lib}(0) = 2, y_{lib}(1) = 0, y_{lib}(2) = -2, y_{lib}(3) = 4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k(x_1(t) + 1) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4(x_1(t) + 1) + kx_2^3(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (-1, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
