TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 15-06-2018

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{32}{(s-1)(s+4)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1\\ 2\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare per quali valori dello stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dello stato è $x_{lib}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-3t}\\ 0\end{bmatrix}$.
3. calcolare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.5)^t - (0.2)^t$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
2. calcolare, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 6\,\cos(\pi\, t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si discutano le proprietà strutturali degli stati $x_a = [0\ \ 0\ -2\ \ 2]^T$ e $x_b = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = -k(x_1(t) - 2) + x_2^2(t)\\ \dot{x}_2(t) = -(x_1(t) - 2)\, x_2(t) - x_2^3(t)\end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (2, 0)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.