TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 2–7–2018

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{5\,s}{s^2+s+100}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}.$$

Conoscendo l'autovalore $\lambda_1 = j4$ e l'autovettore sinistro ad esso associato $l_1^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{j}{2}\end{bmatrix}$:

1. si calcolino la matrice A del sistema e la matrice di transizione dello stato e^{At};
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsive $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t), x(t), y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \frac{\alpha}{5}\,x(t) + 5u(t)\\ y(t) &= 2\,x(t)\end{aligned}$$

si discuta la stabilità del sistema al variare di $\alpha \in (-\infty, +\infty)$; inoltre, per $\alpha = 1$, si calcoli l'evoluzione libera dello stato agli istanti di tempo $t = 1, 2, 3$ per una condizione iniziale $x(0) = -2$. Infine, calcolare la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(\pi t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si discutano le proprietà strutturali degli stati $x_a = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$ e $x_b = [0\ \ -1\ \ 0\ \ 0]^T$.

Problema 5. (4 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = (k+2)\,x_1^5(t) + 2\,x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = -3\,x_1(t) + (k+2)\,x_2(t)\end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
