

# TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 6–9–2018

**Problema 1. (7 punti)** Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = \frac{2K}{(s-4)(s+10)}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per  $K = 1$ ;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di  $K \in (-\infty, +\infty)$  utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

**Problema 2. (8 punti)** Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. si calcoli la matrice di transizione dello stato  $e^{At}$ ;
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva  $w(t)$  e la funzione di trasferimento  $W(s)$  del sistema;
4. si calcoli la risposta forzata all'ingresso  $u(t) = -\cos(t)$ .

**Problema 3. (5 punti)** Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove  $u(t), x(t), y(t)$  sono scalari:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= -\frac{1}{2}x(t) + 2u(t) \\ y(t) &= \frac{3}{2}x(t) \end{aligned}$$

dopo aver discusso la stabilità del sistema, se ne calcoli la risposta forzata al gradino unitario. Infine, si calcoli la risposta armonica all'ingresso  $u(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t)$ .

**Problema 4. (5 punti)** Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$  e  $\mathcal{X}_4$  della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si discutano le proprietà strutturali degli stati  $x_a = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $x_b = [0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ .

**Problema 5. (5 punti)** Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k(x_1(t) - 1)^3 + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2(x_1(t) - 1) + kx_2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che  $x_e = (1, 0)$  è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di  $k \in (-\infty, \infty)$  utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (si utilizzi una funzione quadratica).