TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 2-7-2019

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{10s+3}{s(s^2+s+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(z)$;
4. calcolare la risposta al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(\pi t)$.

Problema 3. (5 punti) Data una rappresentazione esplicita di un sistema a tempo continuo:

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

con

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}+e^{-2t} \end{bmatrix}, \qquad H(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}-e^{-2t} \\ e^{-t}+e^{-2t} \end{bmatrix},$$

calcolare le matrici A e B della forma implicita.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\big(x_1(t)-1\big)^3 - 5x_2(t)\big(x_1(t)-1\big) \\ \dot{x}_2(t) = \big(x_1(t)-1\big)^2 - x_2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (1,0)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
