

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 16-7-2019

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{16}{(s+4)(s^2+64)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(0) = 0, \quad w(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}, \quad t > 0$$

si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$, $x_b = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $x_c = [1 \ 1 \ -1 \ 1]^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t) - 1) + kx_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) - x_2(t) + 1 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $x_e = (0, 1)$ è un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.