TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 4-11-2019

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = \frac{(s-20)}{s(s+1)(s+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(s)$;
4. calcolare l'evoluzione libera dello stato con $x(0) = [1 \quad -1]^T$.

Problema 3. (5 punti) Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t), x(t), y(t)$ sono scalari:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \frac{1}{2}\, x(t) - 3u(t) \\ y(t) &= 2\, x(t) \end{aligned}$$

1. Discutere la stabilità del sistema al variare di $\alpha \in (-\infty, +\infty)$;
2. per $\alpha = 1$ calcolare la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi t)$;

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]^T$, $x_b = [0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, $x_c = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + (k-1)x_2(t) + (k-1)^2 x_1^2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
