TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 16-1-2020

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\frac{5}{4}\frac{(s-10)}{(s^2+25)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(s)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(0) = 0, \quad w(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{t-1}, \ t > 0$$

si calcolino la risposta forzata a $u(t) = (-1)^t$ e la risposta armonica a $u(t) = 3\cos(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y_l(0) = -1$, $y_l(1) = 3$, $y_l(2) = 5$, $y_l(3) = 1$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1+k)\big(x_1(t)-3\big) + 4\big(x_1(t)-3\big)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\big(x_1(t)-3\big)^2 - x_2(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $x_e = (3, 0)$ è un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
