TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 30-1-2020

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{4\,(s+10)}{s^2+4s+4}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sapendo che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = j2,\ \lambda_2 = -j2$ e che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1^T associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad l_1^T = \begin{bmatrix} -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (4 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo discreto caratterizzato dalla seguente funzione di transizione dello stato:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2})^t & (-\frac{1}{2})^t - 2^t \\ 0 & 2^t \end{bmatrix}.$$

1. Si calcoli la matrice A;
2. sapendo che $B = [0 \quad 1]^T$ e $C = [0 \quad 1]$, si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e, solo se esiste, la risposta armonica a $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si scriva la matrice T che definisce il cambio di base relativo a tale decomposizione per il sistema in esame.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4\,x_1(t) + k\,x_2^3(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
