TEORIA DEI SISTEMI - Compito d'esame del 08–09–2020

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesito 1. (40 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{20}{(s+1)(s+5)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$ e si calcolino analiticamente le pulsazioni alla quale il diagramma polare attraversa l'asse reale;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Quesito 1bis. (15 minuti) Si consideri adesso lo stesso schema a feedback del quesito 1 ma con la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = K\,\frac{20}{(s+1)(s^2+25)}.$$

a Si discuta il legame tra la $G(s)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del quesito precedente;

b Si disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare della $G(s)$ per $K = 1$ (riportare i disegni a matita sullo stesso foglio di carta logaritmica utilizzato per disegnare la $W(s)$ dell'esercizio precedente);

c Utilizzando il criterio di Nyquist si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$.

Quesito 2. (40 minuti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. calcolare i modi naturali del sistema e discuterne le proprietà (stabilità, osservabilità ed eccitabilità). (*Raccomandazione: dopo aver calcolato gli autovalori della matrice A si verifichi la correttezza del risultato*);
2. calcolare la matrice di transizione dello stato;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(z)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Quesito 3. (20 minuti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si discutano le proprietà strutturali degli stati $x_a = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$ e $x_b = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]^T$.

Quesito 4. (15 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (k+1)\,x_1^3(t) + (1-k)\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3\,x_1(t) + k\,x_2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema e dire cosa si può concludere sulla sua stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando solamente il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio.

Domanda scritto-orale.

1. Definire la risposta armonica nei sistemi lineari e stazionari ed enunciare le condizioni per la sua esistenza.
2. Dimostrare la formula della risposta armonica a tempo discreto
3. Calcolare la risposta armonica per il sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento $W(z) = \frac{z}{z-0.5}$ con ingresso $u(t) = cos(\frac{\pi}{2}t)$.