TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 11-11-2020

Quesito 1. (40 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{20(s-1)}{s(s+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$ e si calcolino analiticamente le pulsazioni alla quale il diagramma polare attraversa l'asse reale;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Quesito 2. (30 minuti)
a) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{con} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},$$

in cui la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ha autovalori $\lambda_1 = -1 + j\pi$ e $\lambda_2 = -1 - j\pi$.
Gli autovettori destro e sinistro associati all'autovalore λ_1 sono

$$r_1 = \begin{bmatrix}1\\-j\end{bmatrix} \qquad \ell_1^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & j\end{bmatrix}.$$

Si calcoli l'evoluzione libera dello stato del sistema a partire da $x(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$.

b) Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{con} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},$$

in cui la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ha autovalori

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + j), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - j),$$

e gli stessi autovettori destro e sinistro della matrice del quesito precedente.
Si calcoli l'evoluzione libera dello stato del sistema $x(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$.

c) Si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento di uno a scelta dei due sistemi dei quesiti precedenti.

Quesito 3. (20 minuti)
Sia dato il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

la cui matrice di transizione è

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

1. Si scriva la risposta impulsiva dello stato e la funzione di transizione dello stato (il sistema in forma esplicita) e si verifichi la proprietà di consistenza della funzione di transizione;
2. Si calcoli la matrice A;
3. Si calcoli la risposta dell'uscita al gradino unitario;
4. Si consideri l'ingresso $u(t) = \cos(2t)$ e si dica se esiste la risposta armonica (motivando la risposta). Si calcoli la risposta armonica nel caso in cui esista.

Quesito 4 (20 minuti)

Quesito 4a. Dire per quali valori del parametro α le seguenti matrici sono definite positive

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 8 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 8 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Quesito 4b. Dire se la seguente forma quadratica è definita positiva oppure no

$$8x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Quesito 4c. Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1-\beta)x_1(t) + \beta\, x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\beta^2 x_2(t) - x_1^2(t) \end{cases}$$

1. Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $\beta \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, ove necessario, il metodo di Lyapunov;
2. Si studi per quali valori di β il sistema ammette altri punti di equilibrio.