TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 2 febbraio 2021

Quesito 1 (tempo stimato 45 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{16(1-s)}{s(s+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli per quali valori della pulsazione ω il diagramma polare della $W(j\omega)$ attraversa l'asse reale;
3. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
4. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Quesito 2 (tempo stimato: 20 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

con legame diretto ingresso-uscita $D = 1$ e con matrice di transizione $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$.

Sfruttando le proprietà della matrice di transizione, si calcoli la matrice A della forma implicita e i suoi due autovalori λ_1 e λ_2.

Successivamente, si calcolino le matrici B e C del sistema in modo che il modo naturale associato ad uno dei due autovalori sia osservabile e non eccitabile, e il modo naturale associato all'altro autovalore sia inosservabile ed eccitabile.

Infine, se ne calcoli la risposta impulsiva $w(t)$.

Quesito 3 (tempo stimato: 10 minuti) Dato un sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva dell'uscita:

$$\begin{aligned}w(0) &= 0,\\ w(t) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}, \quad t \geq 1.\end{aligned}$$

Si discuta l'esistenza della risposta armonica e, nel caso esista, la si calcoli in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Quesito 4 (tempo stimato: 15 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = \big(k - 4x_2^2(t)\big)x_1(t) - 3\,x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)\big(1 + x_1(t)x_2(t)\big) + kx_2^2(t)\end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica.

Quesito 5 (tempo stimato: 10 minuti) Utilizzando il criterio di Sylvester, determinare per quali valori dei parametri α e β le seguenti forme quadratiche sono definite positive:

$$1)\ x_1^2 + 9x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2, \qquad 2)\ x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\beta x_1 x_3.$$

Quesito 6 (tempo stimato: 15 minuti) Sia dato il seguente sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Si trovi un valore del parametro α tale da rendere inosservabile il sistema, e in corrispondenza a tale valore si determinino delle basi per i quattro sottospazi $\mathcal{X}_1$,$\mathcal{X}_2$,$\mathcal{X}_3$,$\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Quesito 7 (tempo stimato: 5 minuti) Per ciascuno dei seguenti termini trinomi:

$$1)\ s^2 + s + 1, \quad 2)\ s^2 + s + 4, \quad 3)\ s^2 + 5s + 4, \quad 4)\ s^2 - s + 9,$$

determinare la pulsazione naturale ω_n e lo smorzamento ζ.

Attenzione: nel testo del Quesito 6 dato all'esame, per errore la matrice A riportava un 1 anziché 0 nella posizione $(1,1)$. Pertanto il testo assegnato all'esame è stato il seguente:

Quesito 6 (con errore nella matrice A) (tempo stimato: 15 minuti) Sia dato il seguente sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Si trovi un valore del parametro α tale da rendere inosservabile il sistema, e in corrispondenza a tale valore si determinino delle basi per i quattro sottospazi $\mathcal{X}_1$,$\mathcal{X}_2$,$\mathcal{X}_3$,$\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.
