Soluzioni degli studenti ai quesiti del Compito Scritto di Teoria dei Sistemi

del 2 febbraio 2021

Prof. Costanzo Manes, Dott. Vittorio De Iuliis

QUESITO 1

$$W(s) = K \frac{16(1-s)}{s(s+4)}$$

$K=1$, ω, Nyquist, Routh

$$\tilde{W}(s) = W(s)\Big|_{K=1} = \frac{16(1-s)}{4s(1+\frac{s}{4})} = 4\,\frac{(1-s)}{s(1+\frac{s}{4})}$$

guadagno $K_{\tilde{W}} = 4$ $|4|_{dB} = 20\log_{10}|4| \simeq 12$ dB

$\angle K_{\tilde{W}} = 0$ (numero reale positivo

t. binomio al numeratore $(1-s)$ $\omega_{t1} = 1$ rad/s
Modulo $+20$ dB/dec $\omega \in [1, +\infty)$
Fase $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec $\omega \in [0.1, 10]$

t. monomio al denominatore ~~ω_{t2}~~ $s = j\omega$ Modulo -20 dB/dec $\omega \in [0, +\infty)$
Fase $-\frac{\pi}{2}$ rad/dec

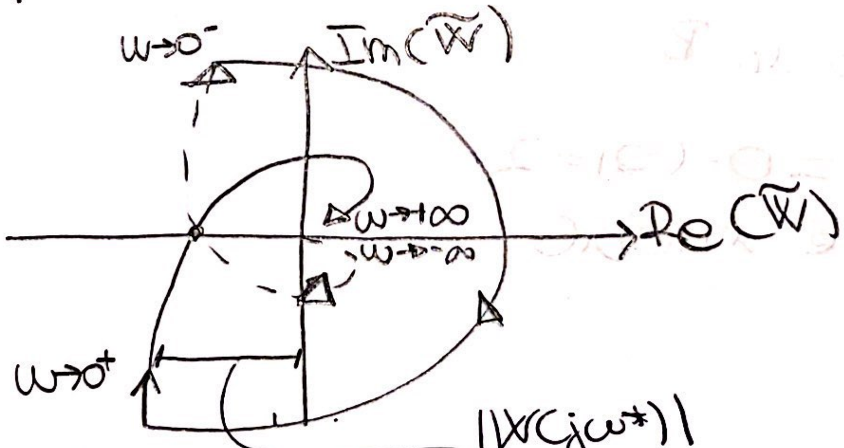
t. binomio al numeratore $(1+\frac{s}{4})$ $\omega_{t2} = 4$ rad/s
Modulo -20 dB/dec $\omega \in [4, +\infty)$
Fase $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec $\omega \in [0.4, 40]$

Modulo

Intervallo	Pendenza
$\omega < 1$	-20 dB/dec
$1 < \omega < 4$	0 dB/dec
$4 < \omega$	-20 dB/dec

Fase

Intervallo	Pendenza
$\omega < 0.1$	0 rad/dec
$0.1 < \omega < 0.4$	$-\pi/4$ rad/dec
$0.4 < \omega < 10$	$-\pi/2$ rad/dec
$10 < \omega < 40$	$-\pi/4$ rad/dec
$40 < \omega$	0 rad/dec



$$\omega^* \Rightarrow \operatorname{Im}\left\{\frac{1-j\omega}{j\omega(j\omega+4)}\right\} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left\{\frac{1-j\omega}{-\omega^2+4j\omega}\right\} = 0$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{(1-j\omega)(-\omega^2-4j\omega)}{(-\omega^2+4j\omega)(-\omega^2-4j\omega)}\right\} = 0 \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{-\omega^2-4j\omega+\omega^3j+4\omega}{\underbrace{\omega^4+\cancel{4j\omega}-\cancel{4j\omega}+16}_{\text{Reale}}}\right\}$$

$$\omega^3 - 4\omega = 0$$

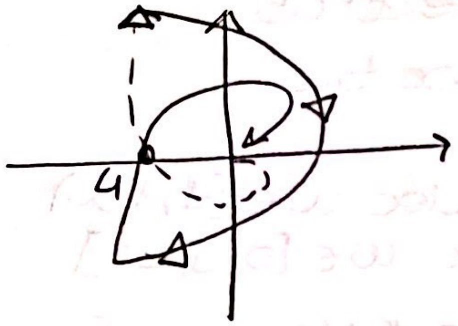
$$\omega(\omega^2-4) = 0 \begin{cases} \omega = 0 & \text{(banale perché so che interseca nell'origine} \\ \omega^* = \pm 2 \end{cases}$$

2

$$\|W(j\omega^*)\|_{\omega^*=2} = \left|\frac{16(1-2j)}{2j(2j+4)}\right| = \frac{16\sqrt{1+4}}{|-4+8j|} =$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{16+64}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{8\cdot 10}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{4\cdot 2\cdot 10}} = \frac{\cancel{16}\sqrt{5}}{2\sqrt{20}}$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{20}}\cdot\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = \frac{\cancel{8}^{4}\sqrt{5}\sqrt{20}}{\cancel{20}\cdot 5} = \frac{2}{5}\sqrt{100} = \frac{10\cdot 2}{5} = 4$$



$n_{AP} = 0 \Rightarrow$ non ci sono radici reali

Per $K>0$ $N_B=-2$

$N_A=?$

Per $K<0$

$N_C=-1$

$n_{CH} = n_{AP} - N_C = +1$

$\forall K<0$ il sistema W_{CH} è INSTABILE

$k<\frac{1}{4} \Rightarrow$ sono in A

$n_{CH} = n_{AP} - N_A = 0$

il sistema è stabile

$K>\frac{1}{4} \Rightarrow$ sono in B

$n_{CH} = n_{AP} - N_A = 0-(-2) = 2$

il sistema è instabile

③

~~De~~ $W_{CH}(S) = \frac{W_{AP}(S)}{1+W_{AP}(S)} = \frac{K\tilde{W}_{AP}(S)}{1+K\tilde{W}_{AP}(S)}$

$= \frac{\frac{16K(1-S)}{S(S+4)}}{1+\frac{16K(1-S)}{S(S+4)}} = \frac{\frac{16K(1-S)}{\cancel{S(S+4)}}}{\frac{S(S+4)+16K(1-S)}{\cancel{S(S+4)}}} =$

$= \frac{16K(1-S)}{S(S+4)+16K(1-S)} = \frac{N(S)}{D(S)}$

$D_{CH}(S) = S^2+4S+16K-\cancel{16K}S = S^2+4(1-4K)S+16K$

Apparato Cartesio

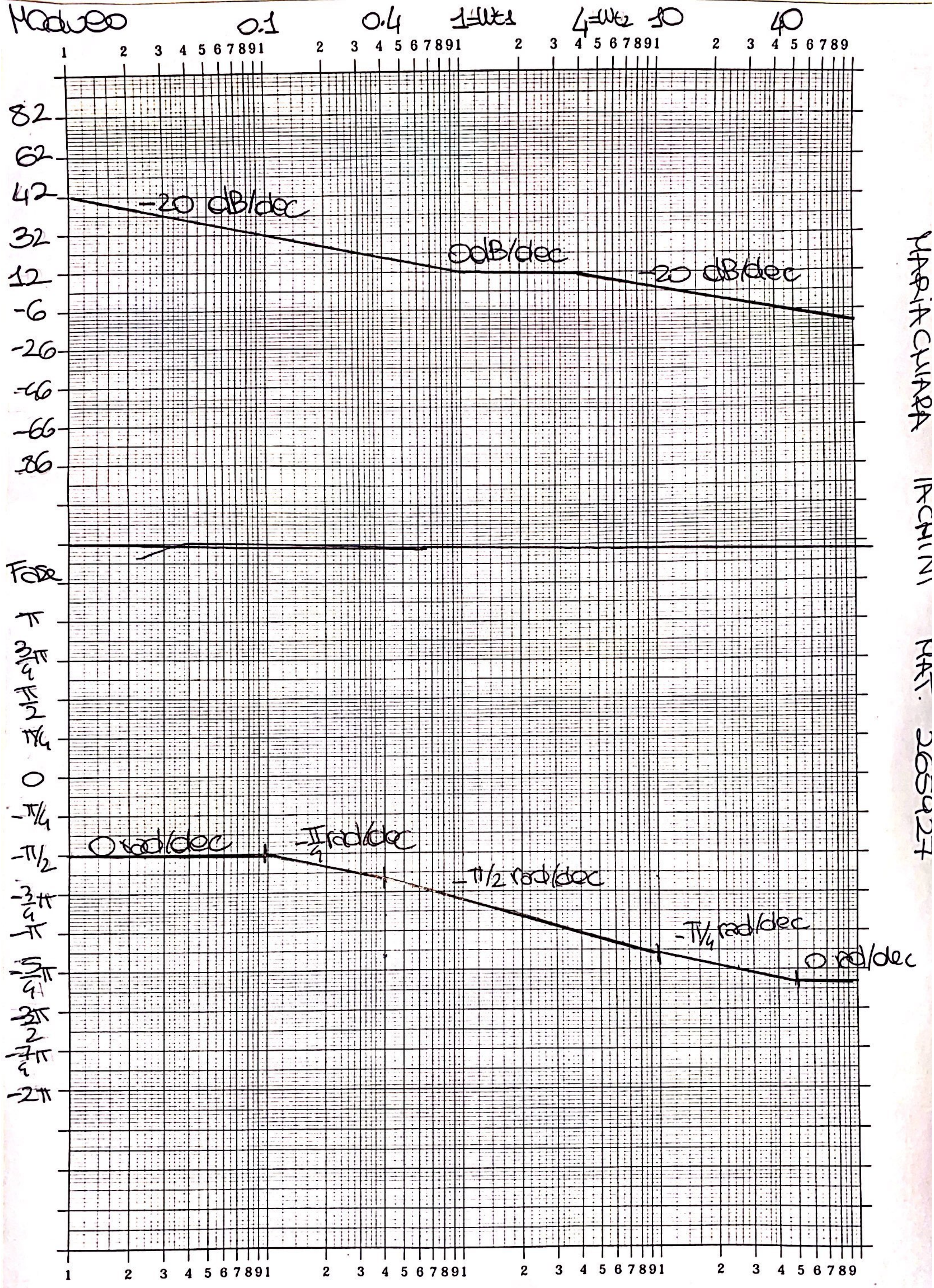
~~$1-4K>0$ $K<\frac{1}{4}$ nessuna variazione di segno ⟹ Il sistema è stabile~~

$K<0$ ⟹ ~~nessuna~~ ~~varia~~ 1 variazione di segno, il sistema è instabile

$0<K<\frac{1}{4}$ ⟹ nessuna variazione di segno il sistema è ~~instabile~~ stabile

$K>\frac{1}{4}$ ⟹ 2 variazioni di segno, il sistema è instabile.

così come ho potuto dimostrare con Nyquist



MARIACHIARA IACHINI MAT. 265927

Quesito 1

$W(s) = \frac{16(1-s)}{s(s+4)}$ $\quad m_{AP}=0$

1) Bode per k=1
2) w per quale interseca
3) denominatore
4) stabilità

1) $\tilde{W}(s)$ per k=1 $= \frac{16(1-s)}{s(s+4)} = \frac{4(1-\frac{s}{1})}{s(1+\frac{s}{4})}$

GUADAGNO (4) — MODULO $20\log_{10}4 \cong 12$ dB — FASE $\langle 4 \rangle = 0$

POLO NULLO — -20 dB/dec — $-\frac{\pi}{2}$

BINOMIO NUME — $+20$ dB/dec $\omega>1$ — $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec $0.1<\omega<10$

BINOMIO DENO — -20 dB/dec $\omega>4$ — $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec $0.4<\omega<40$

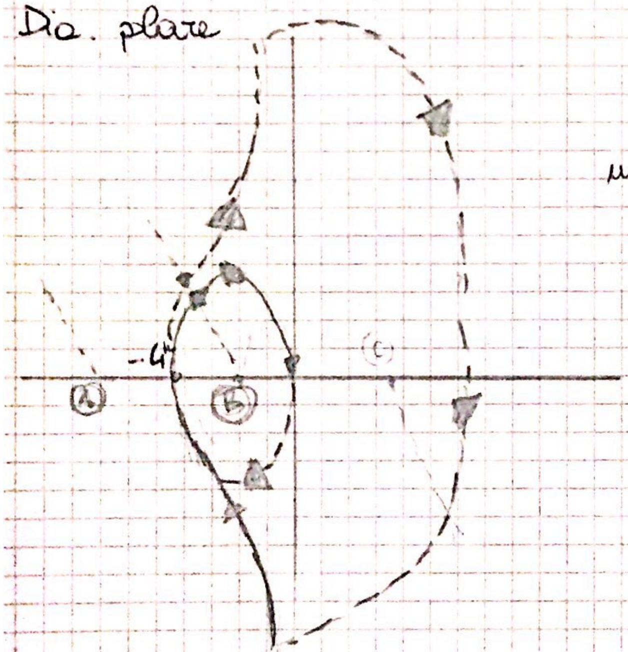
MODULO

$\omega<1$	-20 dB/dec
$1<\omega<4$	0 dB/dec
$\omega>4$	-20 dB/dec

FASE

$\omega<0.1$	0 rad/dec
$0.1<\omega<0.4$	$-\pi/4$ rad/dec
$0.4<\omega<10$	$-\pi/2$ rad/dec
$10<\omega<40$	$-\pi/4$ rad/dec
$\omega>40$	0 rad/dec

Dia. polare



2) $Im\left\{\frac{1-j\omega}{j\omega(j\omega+4)}\right\} = 0$ $\quad j^2\omega^2+4j\omega = -\omega^2+4j\omega$

moltiplico per coup. e coniugato di deno. $\quad -\omega^2-4j\omega+j\omega^3-j^2 4\omega^2$

$Im\{(1-j\omega)(-\omega^2-4j\omega)\} = \{ \ldots +j\omega^3 \}$

$-4\omega+\omega^3=0 \quad \omega(\omega^2-4)=0 \quad \omega=0 \quad \omega=\pm 2$

$|W(j2)| = \frac{|16(1-2j)|}{|2j||2j+4|} = \frac{|16-32j|}{|2j||2j+4|} = \frac{\sqrt{1024+256}}{2\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{1280}}{2\sqrt{20}} = \frac{8\sqrt{20}}{2\sqrt{20}} = 4$

FUORI $0<k<\frac{1}{4}$ $\tilde{N}=0$ $n_{CH}=0$ $\quad$ DENTRO $k>\frac{1}{4}$ $\tilde{N}=2$ $n_{CH}=2$

$k<0$ $\tilde{N}=1$ $n_{CH}=1$

3) Deno di $W_{CH} = s(s+4)+16k(1-s)$

$s^2+4s+16k-16ks$

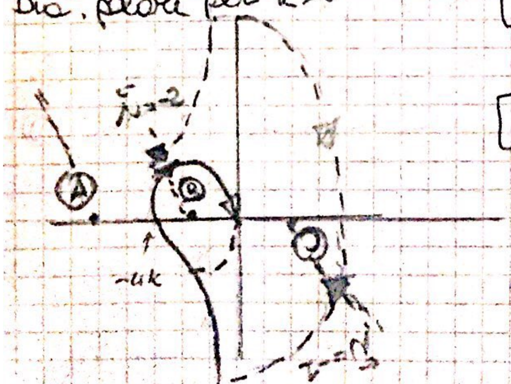
$\underbrace{s^2+s(4-16k)+16k}$

4) Utilizziamo il criterio di Routh $\quad k=\frac{1}{4}$

2	1	16k
1	4-16k	0
0	16k	

1	+	+	+
4-16k	+	+ $\frac{1}{4}$	−
16k	−	+	+
	1	0	2

Dia. polare per k>0



$\boxed{k>0}$

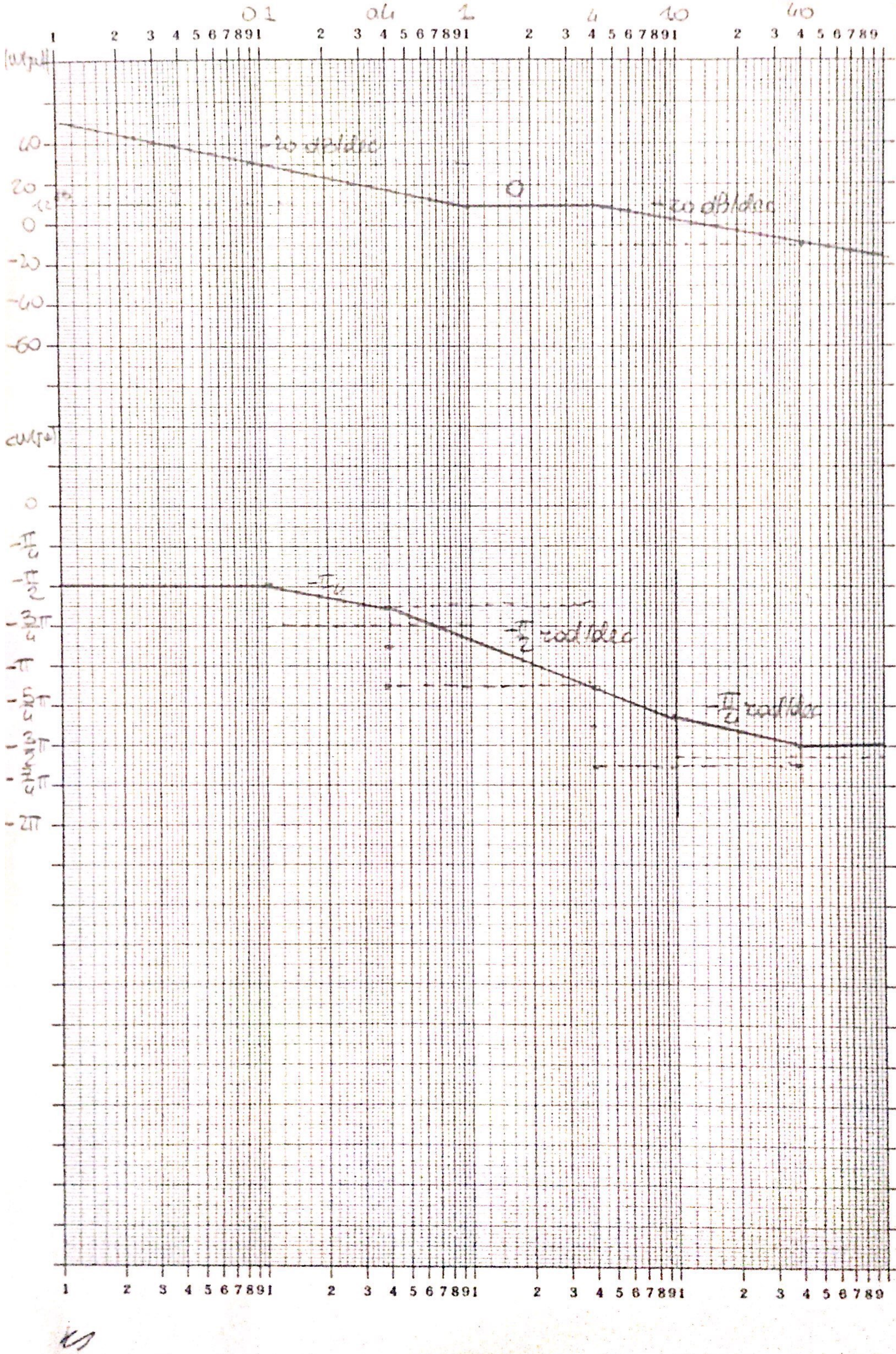
Ⓐ $0<k<\frac{1}{4}$; $\tilde{N}=0$ $n_{CH}=0$

Ⓑ $k>\frac{1}{4}$: $\tilde{N}=-2$ $n_{CH}=0-(-2)=2$

$\boxed{k<0}$

Ⓒ $k<0$; $\tilde{N}=-1$ $n_{CH}=0-(-1)=1$

In conclusione $W_{CH}(s)$: ha 1 polo instabile per $k<0$; è stabile per $0<k<\frac{1}{4}$; ha 2 poli instabili per $k>\frac{1}{4}$


0.1
0.4
1
4
10
40
|W(jω)|
40
20
0
-20
-40
-60
-20 dB/dec
0
-20 dB/dec
∠W(jω)
0
-π/4
-π/2
-3/4 π
-π
-5/4 π
-3/2 π
-7/4 π
-2π
-π/4
-π/2 rad/dec
-π/4 rad/dec
ω

QUESITO 1

$$W(s) = K\frac{16(1-s)}{s(s+4)} \qquad n_{AP}=0$$

1) DIAGRAMMI BODE, POLARE PER $K=1$
2) $\bar{\omega}: \angle W(j\bar{\omega}) = 0$?
3) $P_{CH}=$?
4) $r_{CH}=$? con Nyquist e Routh

$$W(j\omega) = \frac{\overset{4}{\cancel{16}}(1-s)}{\cancel{4}\, s(1+\frac{s}{4})}\Bigg|_{j\omega} = 4\frac{(1-j\omega)}{j\omega(1+j\frac{\omega}{4})}$$

GUADAGNO ALLE BASSE FREQUENZE:

$|4|_{dB} = 20\log(4) = 12\ dB$ MODULO

$\langle 4 \rangle = 0$ rad FASE

TERMINE MONOMIO:

$\frac{1}{j\omega}$: $-20\ dB/dec\ \ \forall\omega$ MODULO; $-\frac{\pi}{2}$ rad FASE

TERMINI BINOMI:

$1-j\omega$ $(\omega_c=1)$:
- $0\ dB/dec$ $\omega<1$; $+20\ dB/dec$ $\omega>1$ } MODULO
- $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec $\omega\in[0.1, 10]$; 0 rad/dec $\omega\notin[0.1, 10]$ } FASE

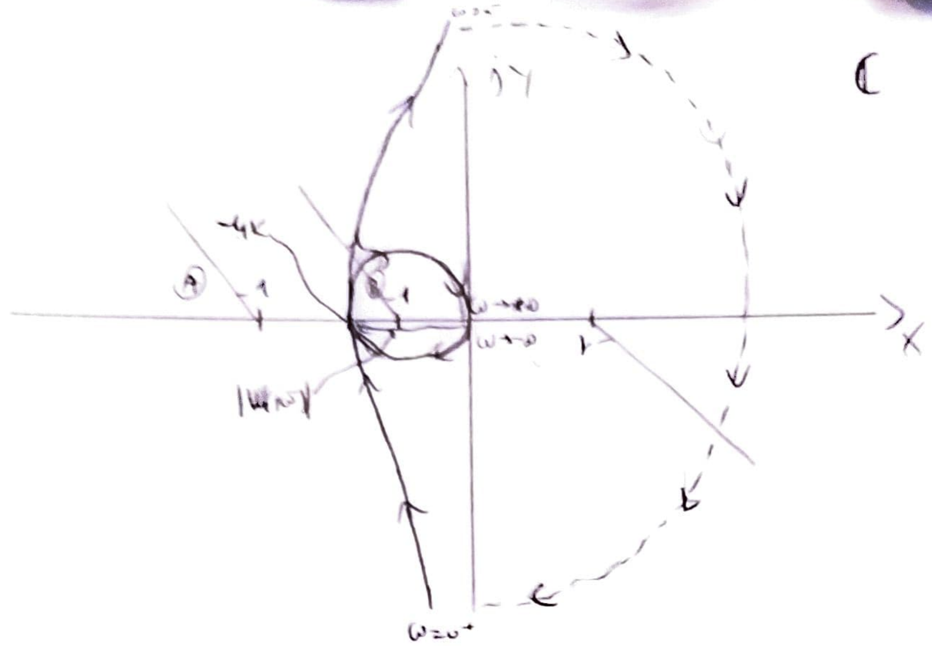
$\frac{1}{1+j\frac{\omega}{4}}$ $(\omega_c=4)$:
- $0\ dB/dec$ $\omega<4$; $-20\ dB/dec$ $\omega>4$ } MODULO
- $-\frac{\pi}{4}$ rad/dec $\omega\in[0.4, 40]$; 0 rad/dec $\omega\notin[0.4, 40]$ } FASE

MODULO:

$-20\ dB/dec$	$\omega<1$
$0\ dB/dec$	$1<\omega<4$
$-20\ dB/dec$	$\omega>4$

FASE:

0 rad/dec	$\omega<0.1$
$-\frac{\pi}{4}$ rad/dec	$0.1<\omega<0.4$
$-\frac{\pi}{2}$ rad/dec	$0.4<\omega<10$
$-\frac{\pi}{4}$ rad/dec	$10<\omega<40$
0 rad/dec	$\omega>40$



$K > 0$:

– SITUAZIONE (A): $N = 0$

$\Rightarrow n_{r_{CH}} = n_{AP} - N = 0$

– SITUAZIONE (B): $N = -2$

$\Rightarrow n_{r_{CH}} = n_{AP} - N = 2$

$K < 0$:

$N = -1 \Rightarrow n_{r_{CH}} = n_{AP} - N = 1$

$$\bar\omega : I_m(W(j\bar\omega)) = 0 \rightarrow I_m(W(j\bar\omega)) = I_m\left(\frac{16(1-j\bar\omega)}{j\bar\omega(4+j\bar\omega)}\right) = I_m\left(\frac{16(1-j\bar\omega)}{-\bar\omega^2+j4\bar\omega}\cdot\frac{-\bar\omega^2-j\bar\omega 4}{-\bar\omega^2-j\bar\omega 4}\right) =$$

$$= I_m\left(\frac{16(1-j\bar\omega)(-\bar\omega^2-j\bar\omega 4)}{\text{Reale}}\right) = \bar\omega^3 - 4\bar\omega = \bar\omega(\bar\omega^2-4)$$

$\bar\omega(\bar\omega^2-4) = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\bar\omega = 0}$ ← CHIUSURA ALL'INFINITO

$\boxed{\bar\omega = \pm 2}$ ← INTERSEZIONE CON ASSE REALE

$$|W(j\bar\omega)| = 16\frac{|1-j2|}{|j2||(4+j2)|} = 16\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{18}} = 8\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \simeq 4$$

~~$\rightarrow -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}K < -1 \Leftrightarrow K < \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{5}}$ CASO (B)~~ $\rightarrow -4K < -1 \Leftrightarrow K > +\frac{1}{4}$ CASO (B) : $n_{r_{CH}} = 2$

~~$\rightarrow -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}K > -1 \Leftrightarrow K > -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{5}}$ CASO (A)~~ $\rightarrow -4K > -1 \Leftrightarrow K < +\frac{1}{4}$ CASO (A) : $n_{r_{CH}} = 0$

$(0 < K < +\frac{1}{4})$

CRITERIO DI ROUTH:

$$D_{CH} = D_{AP} + K N_{AP} = s(s+4) + K16(1-s) = s^2+4s+16K - s16K = s^2 + (4-16K)s + 16K$$

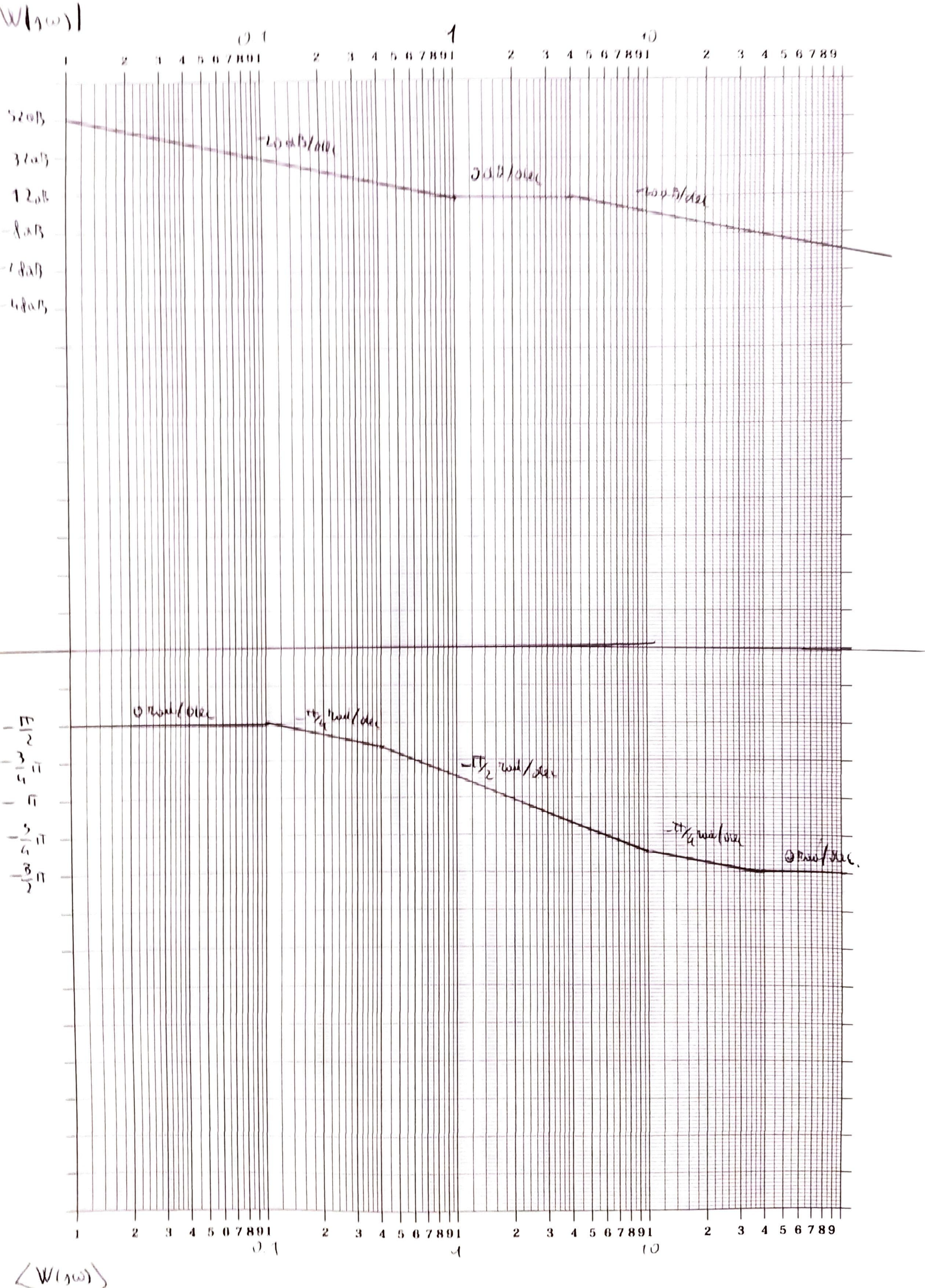
2	1	16K
1	4-16K	0
0	16K	

	$K<0$	$0<K<\frac{1}{4}$	$K>\frac{1}{4}$
1	+	+	+
4-16K	+	+	–
16K	–	+	+
	1V	0V	2V

$\Rightarrow K < 0$: $n_{r_{CH}} = 1$ → INSTABILITÀ

$0 < K < \frac{1}{4}$: $n_{r_{CH}} = 0$ → STABILITÀ

$K > \frac{1}{4}$: $n_{r_{CH}} = 2$ → INSTABILITÀ c.v.d.



|W(jω)|
0.1
1
10
52dB
32dB
12dB
-8dB
-28dB
-48dB
-20dB/dec
0dB/dec
-20dB/dec
0 rad/dec
-π/4 rad/dec
-π/2 rad/dec
-π/4 rad/dec
0 rad/dec
-π/2
-3/4 π
-π
-5/4 π
-3/2 π
∠W(jω)

Quesito 2

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$D = 1 \qquad \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

$A = ?$
$\lambda_1, \lambda_2 = ?$
$B, C = ?$ affinché λ_1 OSS. NON ECC., λ_2 INOSS. ECC.
$w(t) = ?$

$$A = \dot{\phi}(0) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \\ 0 & -3e^{-3t} \end{bmatrix}\Bigg|_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{array}\right\}$ ENTRAMBI ASSOCIATI A MODI NATURALI A.S.

$$[\lambda_1 I - A]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x = 0 \\ \forall y \end{array} \Rightarrow r_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda_2 I - A]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x = y \Rightarrow r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [-1 \quad 1] \Rightarrow Cr_1 = [-1 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ OSS.}$$
$$Cr_2 = [-1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1+1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 \text{ INOSS.}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = R^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} l_1^T = [-1 \quad 1] \\ l_2^T = [1 \quad 0] \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow l_1^T B = [-1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1+1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ NON ECCITABILE}$$
$$l_2^T B = [+1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \text{ ECCITABILE}$$

$\Rightarrow$ se $C = [-1 \quad 1]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha che il modo naturale associato a λ_1 è OSSERVABILE e NON ECCITABILE, mentre il modo naturale associato a λ_2 è INOSSERVABILE ~~ex~~ ECCITABILE

$$w(t) = C\phi(t)B + D\delta(t) = D\delta(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IMPULSO DI DIRAC}}}{\delta(t)}$$

infatti, dato che ~~entro~~ un modo naturale è inosservabile e l'altro non è eccitabile, nessuno dei due compare nella risposta impulsiva.

QUESITO 2

T.C. $D=1$ $\phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

1) si calcoli A
2) B? C? t.c. modo naturale associato a uno dei 2 autoval. sia oss. e non ecc. e l'altro sia non oss. e ecc.
3) $w(t)$?

QUESITO 3 T.D. $w(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}$ $t\geq 1$, $w(0)=0$

esiste risp. armonica? Se sì la si faccia con $u(t)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

QUESITO 2

1) A tempo continuo si ha che $A=\phi'(0^+)$ perché $\phi(t)=e^{At}$, $\phi'(t)=Ae^{At}\xrightarrow{\lim_{0^+}}=A$

$\phi'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t}+3e^{-3t} \\ 0 & -3e^{-3t} \end{bmatrix}$ in $t=0$ $\Rightarrow A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

di cui gli autovalori di A $\rightarrow (\lambda I-A)=0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+3)=0$

$\lambda_1=-1$ $\lambda_2=-3$

quindi sono associati a m.n. asintoticamente stabili

2) $(\lambda_1 I-A)r_1=0$ $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow r_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\lambda_2 I-A)r_2=0$ $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow r_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$L=R^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

* perché l'autovalore non è mai contemporaneamente ecc. e osservabile

OSSERV. $Cr_1\neq 0$, $Cr_2=0$ $\quad [c_1\ c_2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=0$, $c_1-c_2=0$, $c_1=c_2$ $\Rightarrow C=[1\ 1]$

ECC. $l_1^T B=0$, $l_2^T B\neq 0$ $\quad [1\ 1]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=0$ $\quad b_1+b_2=0$ $\quad b_1=-b_2 \rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3) $w(t)=[1\ 1]\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+D\delta(t)=[e^{-t}\quad e^{-t}-\cancel{e^{-3t}}+\cancel{e^{-3t}}]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+D\delta(t)$

$=\cancel{e^{-t}}-\cancel{e^{-t}}+\delta(t)=\delta(t)$

QUINDI $\boxed{w(t)=\delta(t)}$ *

QUESITO 3

$w(t)\xrightarrow{\mathcal{Z}} W(z)$ $\quad W(z)=\mathcal{Z}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right)+\mathcal{Z}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right)=\frac{1}{z}\mathcal{Z}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^t\right)+\frac{1}{z}\mathcal{Z}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^t\right)$

$=\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}=\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{z+\frac{1}{2}}=\frac{z+\cancel{\frac{1}{2}}+z-\cancel{\frac{1}{2}}}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}=\frac{2z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$

dato che $\lambda_1=\left|\frac{1}{2}\right|$, $\lambda_2=\left|-\frac{1}{2}\right|$ <1 esisterà risp. armonica

$\hookrightarrow$ sono as. stabili

$u(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad M=2 \quad \omega=\frac{\pi}{2} \quad \varphi=0$

$\cdot\ |W(e^{j\omega})| = |W(e^{j\frac{\pi}{2}})| = |W(j)| = \dfrac{|2j|}{|0j-\frac{1}{2}||0j+\frac{1}{2}|} = \dfrac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{2}{\frac{5}{4}} = \dfrac{8}{5}$

$\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$

$\cdot\ \langle W(j)\rangle = \langle 2j\rangle - \langle -\frac{1}{2}+j\rangle - \langle \frac{1}{2}+j\rangle = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\overset{(-2)}{(2)} - \pi - \mathrm{arctg}(2) =$

$-\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}(2)$

dunque la risp. armonica sarà

$y(t) = 2\cdot\frac{8}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}(2)\right) =$

$\underbrace{\frac{16}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} - \cancel{2\,\mathrm{arctg}}(2)\right)}$

Quesito 2

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$D = 1 \qquad \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

a T.C. $\phi(0) = I$ OK

$$\dot{\phi}(0) = A \Rightarrow \begin{bmatrix} -1e^{-t} & -1e^{-t} + 3e^{-3t} \\ 0 & -3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1+3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -3$$

$$[\lambda_1 I - A][z_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y=0 \Rightarrow y=0 \\ 2y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases} \qquad r_1=\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\lambda_2 I - A\right]\left[r_2\right]=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x-2y=0 \Rightarrow y=-x \\ 0=0 \end{cases} \qquad r_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L=R^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} l_1^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ l_2^T=\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

λ_1 oss. ma non ecc.

$$l_1^T B=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

Una matrice B può essere $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Infatti $l_2^T B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=1 \Rightarrow \lambda_2$ eccitabile

λ_2 eccit. ma non oss.

$$C\,r_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Una matrice C può essere $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

Infatti $C\,r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \lambda_1$ osservabile

$$w(t) = C e^{At} B + D\,\delta(t)$$

$$e^{At} = R\, e^{\Lambda t} L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ 0 & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Quindi $w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + D\,\delta(t)$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - \cancel{e^{-3t}} + \cancel{e^{-3t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \delta(t)$$

$$= e^{-t} - e^{-t} + \delta(t) = \delta(t)$$

~~Infatti non compaiono i modi naturali relativi~~ 4

Infatti gli autovalori non compaiono nella risposta impulsiva perché il primo è non eccitabile e il secondo è inosservabile

Quesito 3

$w(0) = 0$

$w(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}, \quad t \geqslant 1$

La risposta armonica esiste perché entrambi gli autovalori presenti nella $w(t)$ sono in modulo < 1, e quindi sono asint. stabili

$$W(z) = \frac{1}{z}\,\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{z}\,\frac{z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{z+\frac{1}{2}} = \frac{2z}{\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}$$

$$u(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad M = 2, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0$$

$$y_{arm}(t) = M\left|W(e^{j\omega})\right| \cos\left(\omega t + \varphi + \angle W(e^{j\omega})\right)$$

$$\left|W(e^{j\omega})\right| = \left|W\left(e^{\frac{\pi}{2}j}\right)\right| = \left|W\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right)\right| = |W(j)|$$

$$\angle W(e^{j\omega}) = \angle W(j) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-\frac{5}{4}}\right) = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3}{2}\pi$$

$$|W(j)| = \left| \frac{2j}{(j)^2 - \frac{1}{4}} \right| = \frac{2}{\left|-1-\frac{1}{4}\right|} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5}$$

Quindi $y_{arm}(t) = \frac{8}{5} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3}{2}\pi\right)$

$$= \frac{16}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Quesito 4

$$f(x) = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = (k - 4x_2^2(t))x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)(1 + x_1(t)x_2(t)) + kx_2^2(t) \end{cases} \qquad x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x_e) = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_e \text{ È UN PTO DI EQUILIBRIO}$$

— METODO INDIRETTO (LINEARIZZAZIONE):

$$J_f(x_e) = \begin{bmatrix} k - 4x_2^2(t) & -8x_2(t)x_1(t) - 3 \\ 1 + 2x_1(t)x_2(t) & 2kx_2(t) \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_J(\lambda) = |\lambda I - J_f(x_e)| = \begin{vmatrix} \lambda - k & 3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - k\lambda + 3$$

SE $k < 0 \Rightarrow p_J(\lambda)$ HA SOLO RADICI A PARTE REALE NEGATIVA (perché tutti i termini del polinomio sono concordi) $\Rightarrow x_e$ È A.S. LOCALMENTE SE $k < 0$

SE $k > 0 \Rightarrow p_J(\lambda)$ HA ALMENO UNA RADICE A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow x_e$ È INST.

SE $k = 0 \Rightarrow$ CASO CRITICO:

— METODO DIRETTO PER $k = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_2^2(t)x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1^2(t)x_2(t) \end{cases} \qquad V(x) = x_1^2(t) + \alpha x_2^2(t) > 0$$

($\alpha > 0$ perché altrimenti non è definita positiva)

$$\frac{dV}{dx} f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & \alpha 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4x_2^2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_1^2x_2 \end{bmatrix} = -4x_2^2x_1^2 - 3x_1x_2 + \alpha 2x_1x_2 + 2\alpha x_1^2x_2^2$$

se $\alpha = 3/2$

$$\frac{dV}{dx} f(x) = -4x_2^2x_1^2 - \cancel{3x_1x_2} + \cancel{3x_1x_2} + 3x_1^2x_2^2 = -x_2^2x_1^2 \leq 0$$

$\frac{dV}{dx} f(x)$ È SEMIDEFINITA NEGATIVA perché $\frac{dV}{dx} f(x) = 0$ per $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ PER $k = 0$, IL PTO $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ È SEMPLICEMENTE STABILE

RIASSUMENDO:

$k < 0$ · x_e È A.S.

$k > 0$ x_e È INST.

$k = 0$ x_e È S.S.

Quesito 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (k - 4x_2^2)x_1 - 3x_2 = kx_1 - 4x_2^2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(1 + x_1x_2) + kx_2^2 = x_1 + x_1^2x_2 + kx_2^2 \end{cases}$$

$x_e = [0 \ 0]^T$, studiare la stabilità $k \in (-\infty, \infty)$

Linearizzazione:

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} k - 4x_2^2 & -3 \\ 1 + x_1x_2 & +2kx_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = |\lambda I - J(x_e)| = \begin{bmatrix} \lambda - k & -3 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda k + 3$$

~~se k ≤ 0 ⇒~~

- se $k < 0$ ⇒ ho tutti autovalori a parte reale negativa ⇒ x_e è localmente A.S.
- se $k > 0$ ⇒ ho un autovalore a parte reale positiva ⇒ x_e è instabile
- se $k = 0$ ⇒ CASO CRITICO

Metodo diretto di Lyapunov:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_2^2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(1 + x_1x_2) \end{cases} \qquad \cancel{V(x) = \frac{\gamma}{2}x_1^2 + \frac{\beta}{2}x_2^2}$$

$$\cancel{\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}f(x) = [\gamma x_1 \ \ \beta x_2]\begin{bmatrix} -4x_2^2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_1^2x_2 \end{bmatrix} =}$$

$$\cancel{= -4\gamma x_1^2x_2^2 - 3\gamma x_1x_2 + \beta x_1x_2 + \beta x_1^2x_2^2}$$

$$\cancel{-4\gamma x_1(x_1x_2^2)}$$

$$V(x) = \frac{\gamma}{2}x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}f(x) = [\gamma x_1 \ \ x_2]\begin{bmatrix} -4x_2^2x_1 - 3x_2 \\ x_1(1 + x_1x_2) \end{bmatrix} =$$

$$= -4x_1^2x_2^2\gamma - 3\gamma x_1x_2 + x_2(x_1 + x_1^2x_2) \Rightarrow \text{scelgo } \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{4}{3}x_1^2x_2^2 - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_1x_2} + x_1^2x_2^2 = -\frac{1}{3}x_1^2x_2^2$$

ottengo che:

$$V(x) > 0$$
$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{3}x_1^2x_2^2 \le 0$$

Semidefinita negativa
x_e semplicemente stabile

QUESITO 4 $\begin{cases} x_1' = (k - 4x_2^2)x_1 - 3x_2 \\ x_2' = x_1(1 + x_1 x_2) + kx_2^2 \end{cases}$ stabilità con Lyapunov

QUESITO 5 con cond. di Sylvester per quali α, β sono positive
1) $x_1^2 + 9x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2$ 2) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2 x_1 + 2\beta x_1 x_3$

QUESITO 4 $\begin{cases} x_1' = kx_1 - 4x_1 x_2^2 - 3x_2 \\ x_2' = x_1 + x_1^2 x_2 + kx_2^2 \end{cases}$ $J(x) = \begin{bmatrix} k - 4x_2^2 & -8x_1x_2 - 3 \\ 1 + 2x_1 x_2 & x_1^2 + 2kx_2 \end{bmatrix}$ calcolato in 0 $\Rightarrow$

$\boxed{\text{in } (0,0) \; x_1' = 0 \; x_2' = 0 \text{ ok}}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} k & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda - k & 3 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - k) - (-3) = 0$

$\lambda^2 - k\lambda + 3 = 0$

utilizzando Cartesio
$k = 0 \to$ autovalori con parte reale nulla
$\Downarrow$
CASO CRITICO
$k > 0 \to$ coeff. con var. di segno $\Rightarrow$ almeno un autovalore positivo
INSTABILITÀ
$k < 0 \to$ coeff. tutti positivi $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ autovalori negativi
ASINTOTICA STABILITÀ

per $k = 0$

$\begin{cases} x_1' = -4x_1 x_2^2 - 3x_2 \\ x_2' = x_1 + x_1^2 x_2 \end{cases}$ scelgo $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{2}x_2^2 > 0$ $\quad \alpha > 0$

$\frac{dV}{dx} x'(t) = \begin{bmatrix} x_1 & \alpha x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4x_1 x_2^2 - 3x_2 \\ x_1 + x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$ se $\alpha = 3$

$= -4x_1^2 x_2^2 - 3x_1 x_2 + \alpha x_1 x_2 + \alpha x_1^2 x_2^2$

$-4x_1^2 x_2^2 - 3\cancel{x_1 x_2} + 3\cancel{x_1 x_2} + 3x_1^2 x_2^2 = -x_1^2 x_2^2 \leq 0$ semidefinita negativa

dunque il sistema per $\begin{cases} k > 0 \text{ è INSTABILE} \\ k = 0 \text{ è A. stabile} \to \text{grazie a } \underbrace{V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2} \\ k < 0 \text{ è semplicemente stabile} \end{cases}$
in $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

QUESITO 5

1) $x_1^2 + 9x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2$ $\quad V(x) = x^T Q x$ dove $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 9 \end{bmatrix}$ *

minori di nord ovest
① $1 > 0$
② $9 - \alpha^2 > 0 \to \alpha^2 < 9$
$-3 < \alpha < 3$

la forma quadratica è positiva per $-3 < \alpha < 3$

* per il criterio $Q > 0$ se i minori di nord ovest sono tutti > 0

Forma quadratica 2) $x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2\beta x_1x_3$

dato che il coeff. di x_2x_3 è uguale a 0 nei posti 2,3 e 3,2 ci sarà 0

$V(x)=x^T Q x$ dove $Q=\begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & \beta \\ -1 & 2 & 0 \\ \beta & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$

minori di N-O

① $1>0$ ok

② $2-(1)=1>0$ ok

③ $1(8)-(-1)(-4)+\beta(-2\beta)=8-4-2\beta^2>0$ $\quad 4-2\beta^2>0 \quad 2\beta^2<4 \quad \beta^2<2 \rightarrow -\sqrt{2}<\beta<\sqrt{2}$

Quindi la forma quadratica è def. positiva per $-\sqrt{2}<\beta<\sqrt{2}$

QUESITO 5

1) $x_1^2 + 9x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 9 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- $P = P^T = \begin{bmatrix} \overset{>0}{1} & -\alpha \\ -\alpha & 9 \end{bmatrix} > 0 \iff \det(P) > 0$

$\det(P) = 9 - \alpha^2 > 0$ per $-3 < \alpha < 3$

2) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\beta x_1 x_3$

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & \beta \\ -1 & 2 & 0 \\ \beta & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$P = P^T = \begin{bmatrix} \overset{>0}{1} & \overset{>0}{-1} & \beta \\ -1 & 2 & 0 \\ \beta & 0 & 4 \end{bmatrix} \iff \det(P) > 0$

$\det(P) = 8 - 2\beta^2 - 4 > 0$

$-2\beta^2 + 4 > 0$ per $-\sqrt{2} < \beta < \sqrt{2}$

Soluzione del quesito 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |P_3| = 1 - 1 = 0$$

$$\qquad \underbrace{\quad}_{B} \;\; \underbrace{\quad}_{AB} \;\; \underbrace{\quad}_{A^2B} \qquad \rho(P_3) = 2$$

$$\mathcal{R} = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2} \right\}$$

[Nota: $A^2B = -(u_1 + u_2)$]

Matrice di osservabilità

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$|Q_3| = -\alpha^3 - 1$$

$|Q_3| \neq 0 \iff -\alpha^3 - 1 \neq 0$ SISTEMA OSSERVABILE

$|Q_3| = 0 \iff \alpha^3 = -1$ SISTEMA INOSSERVABILE

$\alpha^3 = -1 \Rightarrow$ UNA soluzione REALE $\underline{\alpha = -1}$

• Il sistema è inosservabile per $\alpha = -1$

$C = [1 \;\; 0 \;\; -1]$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{N}(Q_3)$$

$$\rho(Q_3) = 2 \Rightarrow \dim(\mathcal{Q}) = 3 - 2 = 1$$

$$Q_3 X = 0 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{Q} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{span}(v)$$

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \operatorname{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cap \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

check
$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c:c:c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} v & u_1 & u_2 \end{array} \end{array} = 0 + 1 + 1 - 0 + 1 - 0 = 3 \neq 0$$

v indipendente da u_1 e u_2

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$$

$$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \mathcal{Q}$$

$$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \{\emptyset\}$$

LUCA SALOMONE 255338

quesito 7

- $s^2 + s + 1 = (1 + 2\xi s + s^2)$

$\omega_n = 1$ $\quad \xi = \frac{1}{2}$

- $s^2 + s + 4 = 4\left(1 + \frac{2\xi s}{2} + \frac{s^2}{4}\right)$

$\omega_n = 2$ $\quad \xi = \frac{1}{4}$

- $s^2 + 5s + 4 = 4\left(1 + \frac{2\xi s}{2} + \frac{s^2}{4}\right)$

$\xi = \frac{5}{2}$ $\quad \omega_n = 2$

nel caso in cui $\zeta > 1$ si tratta di un falso trinomio

$s^2 + 5s + 4 = (s + 1)(s + 4)$

- $s^2 - s + 9 \quad 9\left(1 + \frac{2\xi s}{3} + \frac{s^2}{9}\right)$

$\omega_n = 3$ $\quad \xi = -\frac{1}{6}$

QUESITI 6 E 7

6)

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ $D = 0$

a) IL SISTEMA È INOSSERVABILE?
$\mathcal{X}_1\ \mathcal{X}_2\ \mathcal{X}_3\ \mathcal{X}_4$?

$Q_3 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1+\alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$

IL SISTEMA È INOSSERVABILE SE $\mathcal{Q} = \mathcal{N}(Q_3) = \mathbb{R}^3$.
$\mathcal{N}(Q_3) = \{x : Q_3 x = 0\}$, $\dim(\mathcal{N}(Q_3)) = n - r(Q_3)$ *

Calcolando il determinante di Q_3, si ha $|Q_3| = -\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha - 1$,
che non ha radici reali.
Quindi per qualunque α il determinante $|Q_3|$ è diverso da zero, e quindi il sistema è osservabile.

Per la decomposizione di Kalman, prendo $\alpha = 1$

$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $r(Q_1) = 3$ $\Rightarrow \mathcal{Q} = \mathcal{N}(Q_1) = \{0\}$ span$\{\emptyset\}$

$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $r(P_3) = 3$ $\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{I}_m(P_3) = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA È RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\emptyset\}$

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}_2 = \mathcal{P} = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = $ span$\{\emptyset\}$

$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{X}_4 = $ span$\{\emptyset\}$

DAMIANO URSINI 265337

2)

1) s^2+s+1 $\quad 1+s+s^2$ $\quad \omega_n = 1$, $\zeta = 1/2$

2) s^2+s+4 $\quad 4\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)$ $\quad \omega_n = 2$, $\zeta = 1/4$

$\frac{2\zeta s}{2} = \frac{s}{4}$

3) s^2+5s+4 $\quad 4\left(1+\frac{5s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)$ $\quad \omega_n = 2$ $\quad \zeta = 5/4$

$\frac{2\zeta s}{2} = \frac{5}{2}\frac{s}{2}$

nel caso in cui $\zeta > 1$ si tratta di un falso trinomio

$s^2 + 5s + 4 = (s+1)(s+4)$

4) s^2-s+9 $\quad 9\left(1-\frac{s}{9}+\frac{s^2}{9}\right)$ $\quad \omega_n = 3$ $\quad \zeta = 1/6$

$\frac{2\zeta s}{3} = \frac{1}{3}\frac{s}{3}$