TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 16 febbraio 2021

Gruppo 1

60 minuti

Quesito 1 (9 punti, tempo stimato 45 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{4(s-1)}{(s^2+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Quesito 2 (5 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-t} - e^{-4t}.$$

1. Si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 3\sin(t)$,
2. Si calcoli per quale pulsazione ω lo sfasamento della risposta armonica rispetto all'ingresso è esattamente pari a $-\pi/2$.

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 16 febbraio 2021

Gruppo 2

50 minuti

Quesito 3 (5 punti, tempo stimato: 35 minuti) Sia dato il seguente sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad D = 0.$$

1. Si calcoli la decomposizione spettrale della matrice A e si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si determinino delle basi per i quattro sottospazi $\mathcal{X}_1$,$\mathcal{X}_2$,$\mathcal{X}_3$,$\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

Quesito 4 (4 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ in cui la matrice A ha la seguente decomposizione spettrale:

$$A = (1 + j\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} \frac{1}{2} + (1 - j\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

Si calcoli l'evoluzione libera in corrispondenza allo stato iniziale $x(0) = [1 \;\; 0]^T$.

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 16 febbraio 2021

Gruppo 3

50 minuti

Quesito 5 (5 punti, tempo stimato: 30 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - k\big(x_2(t) - 1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t)\big(x_2(t) - 1\big) + (k-1)\big(x_2(t) - 1\big) \end{cases}$$

1. Si verifichi che $x_e = (0, 1)$ è un punto di equilibrio;
2. Si scrivano le equazioni del sistema nelle coordinate (ξ_1, ξ_2) definite come deviazione rispetto al punto di equilibrio ($\xi(t) = x(t) - x_e$):

   $$\xi_1 = x_1,$$
   $$\xi_2 = x_2 - 1,$$

   e si verifichi che nelle nuove coordinate il punto di equilibrio è $\xi_e = (0, 0)$.
3. Si verifichi che lo Jacobiano calcolato nel punto di equilibrio è lo stesso in entrambe le rappresentazioni del sistema.
4. Si studi la stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica (si scelga la rappresentazione più favorevole).

Quesito 6 (4 punti, tempo stimato: 20 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t). \end{cases}$$

Si considerino le tre candidate funzioni di Lyapunov:

$$V_1(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad V_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2, \quad V_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2.$$

Si verifichi con quali di queste è possibile dimostrare la stabilità semplice o asintotica del punto di equilibrio $x_e = 0$, motivando adeguatamente la risposta.
