Quesito 1 (9 punti, tempo stimato 60 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{10(s-4)}{(s+4)(s+1)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

$$W(s) = K\,\frac{10\cdot(s-4)}{(s+4)(s+1)^2} \Rightarrow K=1,\ W(j\omega) = -10\cdot\frac{\left(1-j\frac{\omega}{4}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{4}\right)}\cdot\frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

Nel tracciare il diagramma dei moduli si tenga conto che $\left|\dfrac{\left(1-j\frac{\omega}{4}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{4}\right)}\right| = \dfrac{\left|1-j\frac{\omega}{4}\right|}{\left|1+j\frac{\omega}{4}\right|} = 1,\ \forall\omega$

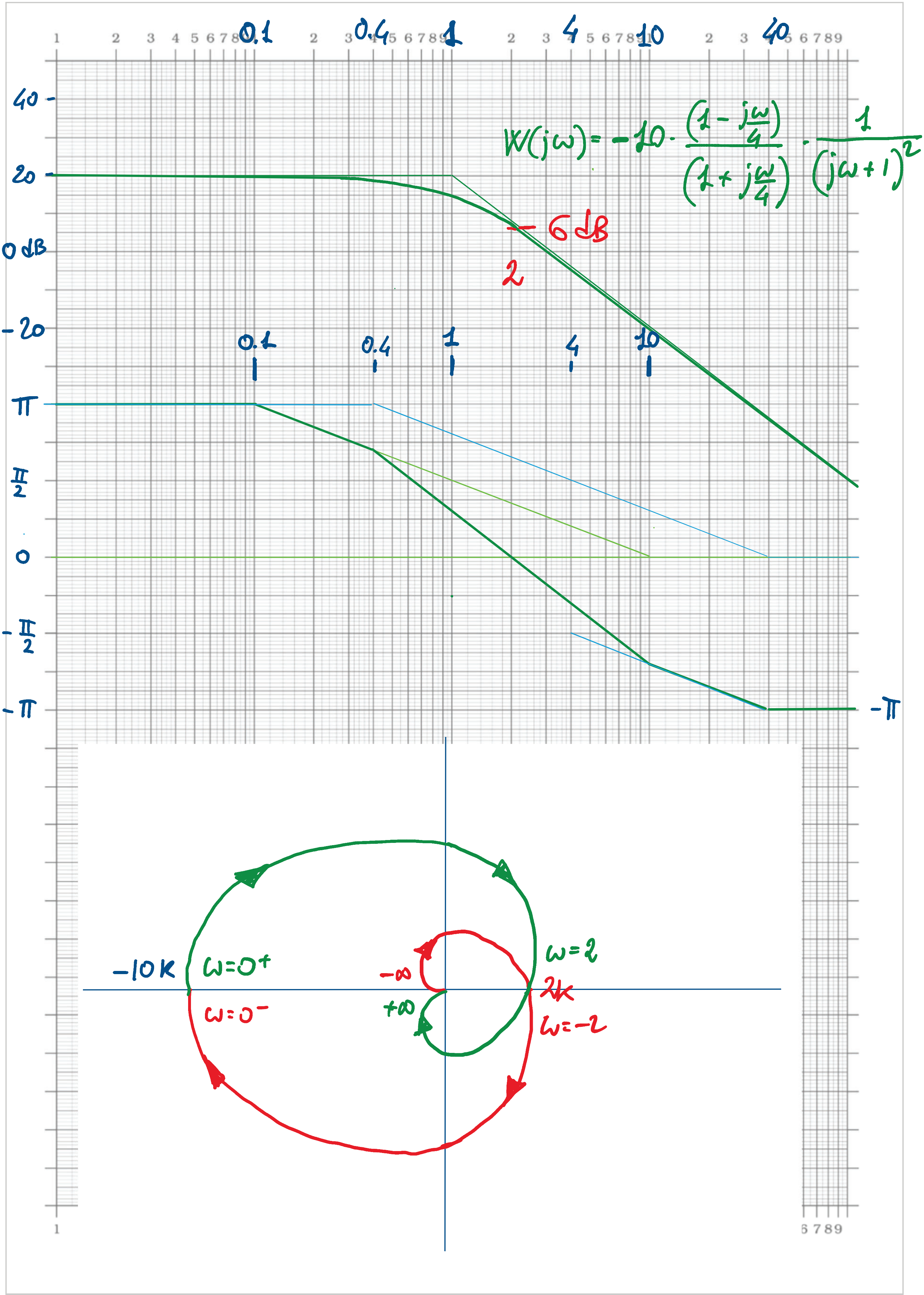
Questo equivale a tracciare il diagramma dei moduli di $\dfrac{-10}{(1+j\omega)^2}$ $\Rightarrow$ 20 dB per ω fino a 1, pendenza -40 dB/decade per $\omega > 1$

Nel tracciamento delle fasi si tenga conto del fatto che $\langle 1-j\frac{\omega}{4}\rangle = -\langle 1+j\frac{\omega}{4}\rangle$

e quindi

$$\left\langle \frac{1-j\frac{\omega}{4}}{1+j\frac{\omega}{4}} \right\rangle = \langle 1-j\tfrac{\omega}{4}\rangle - \langle 1+j\tfrac{\omega}{4}\rangle = -2\cdot\langle 1+j\tfrac{\omega}{4}\rangle$$

Dal punto di vista delle fasi è come avere un polo doppio in -4 al denominatore.



$W(j\omega) = -10 \cdot \frac{\left(1 - j\frac{\omega}{4}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{4}\right)} \cdot \frac{1}{(j\omega+1)^2}$
0.1
0.4
1
4
10
40
40
20
0 dB
-20
-6 dB
2
π
$\frac{\pi}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
$-\pi$
$-10K$
$\omega = 0^+$
$\omega = 0^-$
$-\infty$
$+\infty$
$\omega = 2$
$2K$
$\omega = -2$

DIAGRAMMA POLARE

RICERCA DELLE INTERSEZIONI CON L'ASSE REALE : $Re(W(j\omega))=0$

$$W(j\omega) = -10 \cdot \frac{\left(1-j\frac{\omega}{4}\right)\left(1-j\frac{\omega}{4}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{4}\right)\left(1-j\frac{\omega}{4}\right)} \cdot \frac{(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^2(1-j\omega)^2}$$

$$W(j\omega) = -10 \cdot \frac{\left(1-\frac{\omega^2}{16}-j\frac{\omega}{2}\right)\left(1-\omega^2-j2\omega\right)}{\|1+j\frac{\omega}{4}\|^2 \cdot \|1+j\omega\|^4}$$

$$W(j\omega) = -10 \cdot \frac{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{16}\right)(1-\omega^2)-\omega^2\right)}{*} + j\frac{\left(2\omega\cdot\left(\frac{\omega^2}{16}-1\right)+\frac{\omega}{2}(\omega^2-1)\right)}{*}$$

$$Im(W(j\omega)) = -\frac{10\cdot\omega}{*}\cdot\left(2\left(\frac{\omega^2}{16}-1\right)+\frac{1}{2}(\omega^2-1)\right) = 0$$

$$\frac{\omega^2}{8} - 2 + \frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5\omega^2}{8} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8}(\omega^2-4)=0 \Rightarrow \boxed{\omega^* = \pm 2}$$

$$W(j2) = -10 \left.\frac{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{16}\right)(1-\omega^2)-\omega^2\right)}{\left(1+\left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right)\left(1+\omega^2\right)^2}\right|_{\omega=2} = -10\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{16}\right)(1-4)-4}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(1+4)^2}$$

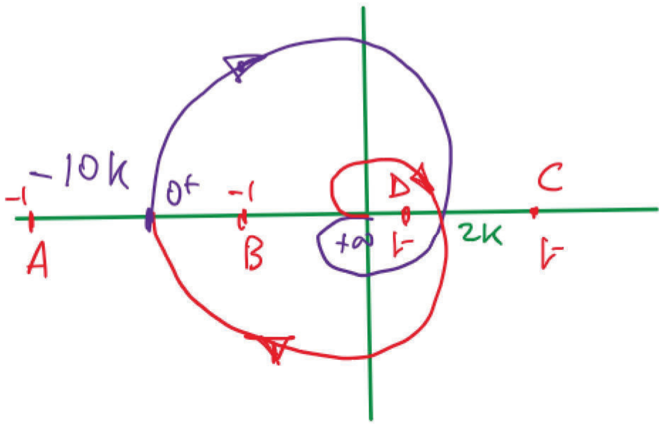
$$W(j2) = -10\cdot\frac{\frac{3}{4}\cancel{\frac{12}{16}}(-3)-4}{\frac{5}{4}\cdot 25} = -10\cdot\frac{-\frac{9}{4}-4}{\frac{5}{4}\cdot 25} = -10\cdot\frac{-\frac{25}{4}}{5\,\frac{25}{4}} = 2$$

$\omega^* = \pm 2$, $\boxed{W(j\omega^*) = +2}$

NOTA: SUL DIAGRAMMA DI BODE DELLE FASI SI VERIFICA CHE LA FASE PER $\omega=2$ È ZERO.

NEL DIAGRAMMA DEI MODULI SI VERIFICA CHE PER $\omega=2$ $|W(j2)|_{dB} = 6$ dB, CHE VUOL DIRE $|W(j2)|=2$

ANALISI DELLA STABILITÀ CON NYQUIST



Numero di poli a parte reale > 0 a ciclo aperto $n_{AP} = 0$

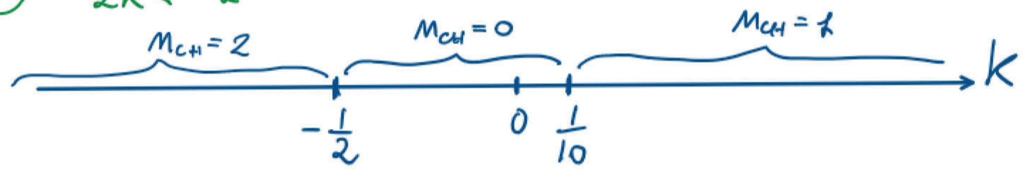
$\Rightarrow n_{CH} = -N$

Ⓐ $k > 0$, $-1 < -10k$ $\Rightarrow$ $k \in (0, \frac{1}{10})$, $N = 0$, $n_{CH} = 0$ A.S.

Ⓑ $k > 0$, $-10k < -1$ $\Rightarrow$ $k \in (\frac{1}{10}, +\infty)$, $N = -1$, $n_{CH} = 1$ INSTAB.

Ⓒ $k < 0$, $-1 < 2k$ $\Rightarrow$ $k \in (-\frac{1}{2}, 0)$, $N = 0$, $n_{CH} = 0$ A.S.

Ⓓ $k < 0$, $2k < -1$ $\Rightarrow$ $k \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, $N = -2$, $n_{CH} = 2$ INSTAB.



Analisi con Routh

$$W(s) = K \cdot 10 \frac{s-4}{(s+4)(s+1)^2}$$

$$P_{CH}(s) = (s+4)(s+1)^2 + 10k \cdot (s-4)$$
$$= (s+4)(s^2+2s+1) + 10ks - 40k$$
$$= s^3 + 6s^2 + (9+10k)s - 40k + 4$$

3	1	$9+10k$
2	$\cancel{6}\ 3$	$-\cancel{40}^{20}k + \cancel{4}^{2}$
1	$(2k+1)\cdot\cancel{\frac{25}{3}}$	
0	$-20k+2$	

$$\frac{(-20k+2) - 3\cdot(9+10k)}{-3} = \frac{-50k-25}{-3} = \frac{25}{3}\cdot(2k+1)$$

	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{10}$	
$P({}^{1}_{3}$	$+$		$+$	$+$
$2k+1$	$-$		$+$	$+$
$-20k+2$	$+$		$+$	$-$
	2V, $M_{CH}=2$		0V, $M_{CH}=0$	1V, $M_{CH}=1$

Quesito 2 (5 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato il seguente sistema lineare e stazionario a tempo disceto:

$$x(t+1) = \frac{1}{3}x(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

1. Si calcoli la risposta al gradino unitario;
2. si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$.

$$W(z) = C(zI-A)^{-1}B + D = \left(z - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{z - \frac{1}{3}}$$

- Risposta al gradino

$$Y(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{3}} \cdot \frac{z}{z-1} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1)} = \frac{R_1}{z-\frac{1}{3}} + \frac{R_2}{z-1}$$

$$R_1 = \lim_{z \to \frac{1}{3}} \frac{Y(z)}{z} \cdot \left(z - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}-1} = -\frac{3}{2}$$

$$R_2 = \lim_{z \to 1} \frac{Y(z)}{z}(z-1) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$Y(z) = -\frac{3}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-1} \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{3}{2}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

- Risposta armonica a $u(t) = \cos\frac{\pi}{4}t$

$$y(t) = \left|W\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\right| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \angle W\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\right), \quad e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$$

$$W(z) = \left.\frac{1}{z-\frac{1}{3}}\right|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow W\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}j}$$

$$W\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\frac{3-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{3j}{3\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}-j3}$$

$$\left|W\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\right| = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2+9}} \simeq 1.250$$

$$\angle W\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = -\operatorname{ATAN}\left(\frac{-3}{3-\sqrt{2}}\right) = \operatorname{ATAN}\left(\frac{3}{3-\sqrt{2}}\right) \simeq 1.084 \text{ rad}$$

Quesito 3 (5 punti, tempo stimato: 30 minuti) Utilizzando opportunamente le trasformate fondamentali:

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \qquad \mathcal{Z}(a^t) = \frac{z}{z-a},$$

si calcolino le antitrasformate delle seguenti funzioni:

$$Y_1(z) = \frac{z}{z-(1+j)} + \frac{z}{z-(1-j)} \qquad Y_2(z) = \frac{jz}{z-(1+j)} - \frac{jz}{z-(1-j)}$$

$$Y_3(s) = \frac{s}{s^2+4} \qquad Y_4(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.$$

$$1+j \quad |1+j| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \angle(1+j) = ATAN(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1+j = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad 1-j = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$Y_1(z) = \frac{z}{z-(1+j)} + \frac{z}{z-(1-j)} \Rightarrow y_1(t) = (1+j)^t + (1-j)^t$$

$$y_1(t) = 2\,Re\left((1+j)^t\right) = 2\,Re\left(2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}t}\right) = \underline{2 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)}$$

$$Y_2(z) = \frac{jz}{z-(1+j)} - \frac{jz}{z-(1-j)} \Rightarrow y_2(t) = j(1+j)^t - j(1-j)^t$$

$$y_2(t) = 2Re\left(j \cdot (1+j)^t\right) = 2Re\left(e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}t}\right) = 2 \cdot 2^{\frac{t}{2}}\, Re\left(e^{j\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$y_2(t) = 2 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$Y_3(s) = \frac{s}{s^2+4} = \frac{s}{(s-j2)(s+j2)} = \frac{R_1}{s-j2} + \frac{R_1^*}{s+j2}$$

$$R_1 = \lim_{s\to j2} Y_3(s)(s-j2) = \lim_{s\to j2} \frac{s}{s+j2} = \frac{j2}{j4} = \frac{1}{2} = R_1^*$$

$$Y_3(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j2} \Rightarrow y_3(t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t}$$

$$y_3(t) = \frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2} = \underline{\underline{\cos(2t)}}$$

$$Y_4(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \quad \Bigg\| \quad (s+1)^2+4=0 \Rightarrow (s+1)^2 = -4 \Rightarrow s+1 = \pm j2$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j2$$

$$Y_4(s) = \frac{s+1}{(s-(-1+j2))(s-(-1-j2))} = \frac{R_1}{s-(-1+j2)} + \frac{R_1^*}{s-(-1-j2)}$$

$$R_1 = \lim_{s\to -1+j2} Y_4(s)\cdot(s-(-1+j2)) = \lim_{s\to -1+j2} \frac{s+1}{s-(-1-j2)}$$

$$= \frac{-1+j2+1}{-1+j2-(-1+j2)} = \frac{j2}{j4} = \frac{1}{2} = R_1^*$$

$$Y_4(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-(-1+j2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-(-1-j2)}$$

$$y_4(t) = \frac{1}{2}e^{(-1+j2)t} + \frac{1}{2}e^{(-1-j2)\cdot t} = e^{-t}\cdot\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}$$

$$\underline{y_4(t) = e^{-t}\cdot\cos(2t)}$$

Quesito 4

giovedì 4 marzo 2021 00:00

Quesito 4 (~~4~~ 5 punti, tempo stimato: 20 minuti) Siano

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

le matrici di raggiungibilità e di osservabilità di un sistema lineare con spazio di stato in $\mathbb{R}^4$.

1. si trovi una base per lo spazio degli stati raggiungibili e una base per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si discuta la raggiungibilità e l'osservabilità dei seguenti stati:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

3. si individuino delle basi per i quattro sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(P_4) = 3,$$

l'ultima colonna è la somma della prima + terza colonna.

$$\mathcal{R} = \text{span}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{span}\begin{bmatrix} v_1 \mid v_2 \mid v_3 \end{bmatrix} = \text{span}\begin{bmatrix} v_1 \mid v_1 + v_2 - v_3 \mid v_3 \end{bmatrix} = \text{span}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(Q_4) = 3,$$

la somma delle prime due colonne meno la terza colonna dà una colonna di zeri.

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q) = \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_1 \notin \mathcal{R} : \text{NON RAGG.} \quad x_1 \notin \mathcal{I} : \text{OSSERVABILE}}$$

È L'ULTIMA COLONNA della P_4

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 \in \mathcal{R} \quad \text{RAGGIUNGIBILE}$$

$$x_2 \in \mathcal{I} \quad \text{INOSSERVABILE}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_2 \in \mathcal{R}$$

RAGGIUNG. (somma delle prime due colonne di P_4 meno la terza colonna)

$X_2 \notin \mathcal{I}$ OSSERVABILE

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}$$ (la base di $\mathcal{I}$ è anche l'ultima colonna della P_4)

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I} = \operatorname{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_2 : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{R} \qquad \mathcal{H}_2 = \operatorname{span}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: $\mathcal{H}_2$ NON È UNICA. ALCUNI ESEMPI:

$$\mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_3 = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{H}_4 = \operatorname{span}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{check } \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

Quesito 5 (5 punti, tempo stimato: 30 minuti) Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo, con $x(t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad \text{con } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

e la seguente famiglia di forme quadratiche:

$$V(x) = 8x_1^2 + 2x_2^2 + 2\beta x_1 x_2.$$

Utilizzando il criterio di Sylvester, si studi per quali valori del parametro β la $V(x)$ utilizzata come funzione di Lyapunov consente di dedurre la stabilità asintotica dell'origine per il sistema in esame.

Possiamo risolvere il problema sia calcolando la $\dot{V} = \frac{dV}{dx} f(x)$, dove $f(x) = A \cdot x$,

sia utilizzando direttamente l'equazione di Lyapunov $A^T Q + Q \cdot A = -P$

In ogni caso occorre preliminarmente definire per quali valori di β la $V(x)$ è definita positiva.

Per fare ciò riscriviamo la $V(x)$ identificando la matrice Q che definisce la forma quadratica

$$V(x) = x^T \cdot Q x = [x_1 \ \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= q_{11} \cdot x_1^2 + q_{22} x_2^2 + (q_{12} + q_{21}) x_1 x_2$$

Scegliendo una Q simmetrica $(q_{12} = q_{21})$

$$V(x) = q_{11} x_1^2 + q_{22} x_2^2 + 2 q_{12} x_1 x_2$$

Pertanto, la famiglia di forme quadratiche in esame

$$V(x) = 8x_1^2 + 2x_2^2 + 2\beta x_1 x_2.$$

è definita dalla matrice $Q = \begin{bmatrix} 8 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix}$

Il criterio di Sylvester considera i seguenti minori principali della Q

$$\begin{bmatrix} 8 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &8 > 0 \ \checkmark \\ &16-\beta^2 > 0 \iff \beta \in (-4,4) \end{aligned}$$

Quindi, le forme quadratiche della famiglia $V(x)$ candidate ad essere funzioni di Lyapunov sono tutte quelle per $\beta \in (-4,4)$

Andiamo adesso a considerare la derivata

$$\dot V(x) = \frac{dV}{dx} f(x) \qquad \text{con} \qquad f(x) = Ax = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -4x_1 \end{bmatrix}$$

$$V = 8x_1^2 + 2x_2^2 + 2\beta x_1 x_2$$

$$\dot V = (16x_1 + 2\beta x_2)(-x_1 + x_2) + (4x_2 + 2\beta x_1)(-4x_1)$$

$$= -16x_1^2 + 16x_1x_2 - 2\beta x_1x_2 + 2\beta x_2^2 - 16x_1x_2 - 8\beta x_1^2$$

$$\dot V = -(16+8\beta)x_1^2 + 2\beta x_2^2 - 2\beta x_1 x_2 \qquad \beta = 0 \Rightarrow s.s.$$

[Nota: facile vedere che con $\beta = 0 \Rightarrow \dot V(x) = -16x_1^2 \le 0$ che dimostra la stabilità semplice di $x_e = 0$]

$$\dot V = x^T \begin{bmatrix} -(16+8\beta) & -\beta \\ -\beta & 2\beta \end{bmatrix} x = -x^T \begin{bmatrix} 16+8\beta & \beta \\ \beta & -2\beta \end{bmatrix} x$$

Quindi $\dot V = -x^T P x$ con $P = \begin{bmatrix} 16+8\beta & \beta \\ \beta & -2\beta \end{bmatrix}$

Con il criterio di Sylvester verifichiamo per quali valori di β la matrice P è definita positiva (e quindi $\dot{V} = -x^T P x < 0$)

Minori di Sylvester $\quad P = \begin{bmatrix} 16+8\beta & \beta \\ \beta & -2\beta \end{bmatrix}$

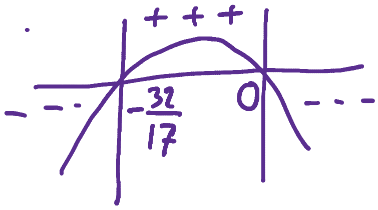
$16+8\beta > 0 \Rightarrow \beta > -2$

$(16+8\beta)(-2\beta) - \beta^2 > 0$

$$-16\beta^2 - 32\beta - \beta^2 > 0 \Rightarrow -17\beta^2 - 32\beta > 0$$

$$-(17\beta + 32)\cdot\beta > 0$$

$$\beta^* = -\frac{32}{17} = -1.882$$



Quindi $\quad P > 0 \iff \beta \in \left(-\frac{32}{17}, 0\right)$ AND $\beta > -2$

Ovvero $\quad \dot{V} < 0 \iff P > 0 \iff \beta \in \left(-\frac{32}{17}, 0\right)$

ATTENZIONE: $V > 0 \iff Q > 0 \iff \beta \in (-4, 4)$

CONCLUSIONE: Tutti i valori di $\beta \in \left(-\frac{32}{17}, 0\right)$ consentono di concludere che $x_e = 0$ è ASINTOTICAMENTE STABILE

NOTA: $\beta = 0$ e $\beta = -\frac{32}{17}$ permettono di concludere solo la STABILITÀ SEMPLICE.

Per $\beta = 0 \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$ (Semidef. Positiva $\Rightarrow \dot{V} \leq 0$)

$$\beta = -\frac{32}{17} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 16 - 8\cdot\frac{32}{17} & -\frac{32}{17} \\ -\frac{32}{17} & \frac{64}{17} \end{bmatrix} = \frac{16}{17}\cdot\begin{bmatrix} 17-8\cdot 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{16}{17}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

INVECE DI CALCOLARE $\dot{V} = \frac{dV}{dx} f$

si sarebbe potuto direttamente calcolare la matrice P

ricorrendo all' equazione di Lyapunov $A^T Q + Q A = -P$

$V = x^T Q x$ e $\dot{V} = -x^T P x$

Con $P = -(A^T Q + Q A) = -\left[\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right]$

Ottenendo nuovamente $P = \begin{bmatrix} 16 + 8\beta & \beta \\ \beta & -2\beta \end{bmatrix}$

Quesito 6 (4 punti, tempo stimato: 20 minuti) Sia dato il sistema regolare a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) - kx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (k-1)x_2(t) + x_1(t) \end{cases}$$

Se ne calcolino i punti di equilibrio in funzione del parametro k.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 - kx_2 \\ (k-1)x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

I punti di equilibrio si trovano risolvendo $f(x)=0$

$$f(x)=0 \quad \begin{cases} -x_1^3 + k x_2 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_e^1 = (0,0)} \text{ punto di equilibrio}$$

Altri punti di equilibrio: se $k-1 \neq 0$

$(k-1)x_2 + x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = (1-k)x_2$

Sostituendo x_1 nella prima equazione

$-(1-k)^3 x_2^3 + k \cdot x_2 = 0 \Rightarrow \left(-(1-k)^2 x_2^2 + k\right) x_2 = 0$

La soluzione $x_2 = 0$ è già considerata $(x_e^1 = (0,0))$

Troviamo altre soluzioni

Nel caso $1-k \neq 0 \Rightarrow x_2^2 = \dfrac{-k}{(1-k)^3}$

	0	1	
$-k$	+	−	−
$(1-k)^3$	+	+	−

$x_2^a = +\sqrt{\dfrac{-k}{(1-k)^3}}$

$x_2^b = -\sqrt{\dfrac{-k}{(1-k)^3}}$

$k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$x_1 = (1-k)x_2$

$$\boxed{x_e^a = \left((1-k)\sqrt{\frac{k}{(k-1)^3}}, \sqrt{\frac{k}{(k-1)^3}}\right)}, \quad \boxed{x_e^b = \left(-(1-k)\sqrt{\frac{k}{(k-1)^3}}, -\sqrt{\frac{k}{(k-1)^3}}\right)}$$

Questi due punti di equilibrio esistono solo per $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ $\left(k \notin [0, 1]\right)$