TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 17-1-2022

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = -10\,K\,\frac{(s-1)}{(s+10)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali e si calcoli la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
2. si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
3. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-4t} + 2e^{-t}$$

1. Si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^t$;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 3\sin(2t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - \big(x_2(t) - 1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = k\big(x_2(t) - 1\big) + 4\,x_1(t)\big(x_2(t) - 1\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0, 1)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
