TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame dell'1-2-2022

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = 10\,K\frac{(s-10)}{(s^2+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -i$ e $\lambda_2 = i$, e che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1^T associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}, \qquad l_1^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{i}{4} \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (6 punti) Dato il sistema a tempo discreto a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1}, \; t > 0, \quad w(0) = 0,$$

si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica a $u(t) = (-1)^t$. Inoltre, si verifichi che le due espressioni coincidono a transitorio esaurito. *Suggerimento: si scriva $(-1)^t$ in forma di seno o coseno.*

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si fornisca un esempio di stato simultaneamente non raggiungibile e non osservabile.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1-k)\,x_1(t)^3 + 2\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\,x_1(t) + (1-k)\,x_2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità dell'origine al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
