TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 30-6-2022

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\frac{20\,(s-5)}{s\,(s^2+20s+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$ e la risposta impulsiva;
3. calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita e la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2^t$;
4. fornire, se esiste, un esempio di stato inosservabile per il sistema.

Problema 3. (5+1 punti) Dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo caratterizzato da:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2t) & -e^{-t}\sin(2t) \\ e^{-t}\sin(2t) & e^{-t}\cos(2t) \end{bmatrix}, \quad H(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2t) \\ e^{-t}\sin(2t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Determinare le matrici A, B del sistema in forma implicita;
2. calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
3. calcolare, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 10\sin(t)$.
4. *Facoltativo:* verificare le proprietà di semigruppo per $\Phi(t)$. *Suggerimento:* utilizzare le formule di addizione di seno e coseno.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà di raggiungibilità e osservabilità dei quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_1(t) - \dfrac{1}{4}\,x_1(t)\,x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_1(t)\,x_2^3(t) - 4\,x_2(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.