TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 16-02-2023

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{50}{(s-1)(s+5)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. Calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$
3. Calcolare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
4. si trovi lo stato iniziale $x(0)$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(t) = e^t$.

Problema 3. (5 punti) Sia dato un sistema a tempo discreto a un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.5)^{t-1} \quad t > 0, \quad w(0) = 0.$$

Utilizzando la trasformata $\mathcal{Z}$ si calcoli la risposta alla seguente sequenza di ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } t \text{ è dispari} \end{cases} \qquad \text{per } t \geq 0, \quad u(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

dopo averla scritta come una funzione sinusoidale. Infine, si calcoli la risposta armonica al medesimo ingresso.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [0\ \ 0\ \ 0\ -1]$ e $x_b = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_1(t) + \dfrac{1}{3}\,x_1^3(t)\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_1(t) - x_1^4(t) - \dfrac{1}{2}\,x_1^2(t)\,x_2(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine sia un punto di equilibrio per il sistema assegnato, se ne discuta la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$, utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
