TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 03-07-2023

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = 40\,K \frac{s+4}{s\,(s-2)(s-8)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$ la cui matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$ e le matrici B e C sono le seguenti

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. si determini la matrice A del sistema e se ne calcoli la decomposizione spettrale;
2. si discutano le proprietà dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema (facendo meno calcoli possibile).

Problema 3. (5 punti) Si consideri il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.2)^{t-1} - (0.5)^{t-1}, \quad t > 0, \quad w(0) = 0.$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
2. calcolare la risposta forzata al gradino unitario e, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(\pi\, t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si discutano le proprietà strutturali dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -k(x_1(t) - 2) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -(x_1(t) - 2)\, x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (2, 0)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*suggerimento: preliminarmente allo studio della stabilità con Lyapunov è bene effettuare un cambio di coordinate nel quale il punto di equilibrio sia* $(0, 0)$).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
