TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 19-07-2023

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{10\,(s+5)}{(s^2+2s+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. Calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$;
3. Calcolare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
4. Calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(0) = 0, \quad w(t) = (0.2)^{t-1}, \quad t > 0,$$

1. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determini il numero di modi naturali simultaneamente osservabili ed eccitabili del sistema a partire dalle informazioni ottenute ai punti precedenti.

Problema 5. (5 punti) Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3\,x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\,x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2$.
In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rendono $V(x)$ definita positiva;
2. determinare un valore di α che consenta di dimostrare la stabilità asintotica dell'origine del sistema.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
