TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 12-09-2023

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{2\,(s-50)}{(s-10)(s+20)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 2+j,\ \lambda_2 = 2-j$.
Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1 associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad l_1^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(z)$;
4. calcolare l'evoluzione libera dell'uscita per uno stato iniziale $x(0) = [1 \quad 2]^\top$.

Problema 3. (6 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo caratterizzato da:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

1. Si calcolino la matrice A, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
2. si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e, se esiste, la risposta armonica a $u(t) = \sin(t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determini il numero di modi naturali simultaneamente osservabili ed eccitabili del sistema a partire dalle informazioni ottenute ai punti precedenti.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t) - \big(x_2(t) - 5\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)\,\big(x_2(t) - 5\big) + k\,\big(x_2(t) - 5\big). \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0, 5)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
