

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 21-07-2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = K \frac{20(s+1)}{(s-1)(s-4)}$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.
3. Si calcoli per quale pulsazione ω la fase di $W(j\omega)$ (per $K > 0$) è pari a $\pi/2$.

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalla stesse matrici A , B e C (con $D = 0$)

$$\text{T.C. } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad \text{T.D. } \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si calcolino le matrici di transizione $\Phi(k) = A^k$ e $\Phi(t) = e^{At}$ e le risposte impulsive dell'uscita dei due sistemi;
2. Si discutano le proprietà dei modi naturali dei due sistemi;
3. Si calcoli la risposta al gradino unitario del sistema a tempo discreto;
4. Si discuta l'esistenza della risposta armonica per entrambi i sistemi.

Problema 3 (6 punti)

Si dato un sistema a tempo discreto con ingresso e uscita scalari, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(k) = (0.1)^k - (-0.2)^k, \quad k \geq 0.$$

Si calcolino le risposte armoniche agli ingressi $u(k) = \cos((\pi/2)k)$ e $u(k) = \cos(\pi k)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_A = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^\top$.
4. Si individui in quanti passi è raggiungibile lo stato $\bar{x}_B = [0 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^\top$.
5. Esporre il motivo per cui in un sistema di dimensione n , con un ingresso scalare, il vettore $A^n B$ è sempre raggiungibile. In alternativa, spiegare perché se uno stato $\bar{x}$ non è raggiungibile in n passi, allora non può esserlo nemmeno in $n+1$ passi.

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k(k-1)x_1(t) + 2x_1^3(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2(t) - kx_2(t). \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$.

Quesito 5b. Si dica per quali valori di α e β le seguenti forme quadratiche sono definite positive

$$10x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_1x_2, \quad 10x_1^2 + 2x_2^2 - \beta x_1x_2.$$

Nota: considerata la presenza di quesiti *extra*, la somma dei punteggi degli esercizi fa 34 e non 30.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
